Mathematische Grundlagen der Relativitätstheorien - Lineare Algebra, Invarianten -

Wolfgang Lange

20. Oktober 2014

1 Lineare Algebra

1.1 Determinanten

Determinanten sind quadratische Gebilde der Gestalt

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ : & : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ : & : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Eine Unterdeterminante A_{ik} bzw. ein Minor entsteht durch streichen der Zeile i und der Spalte k. Das Element a_{ik} und der Minor A_{ik} adjungierte Minoren. Dieses Prinzip kann man auch auf mehrere Zeilen und Spalten anwenden.

Geränderte Determinanten entstehen durch hinzufügen von m Zeilen und Spalten

$$|A_+| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & u_{11} & .. & u_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & u_{21} & .. & u_{2m} \\ : & : & : & : & : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} & u_{n1} & .. & u_{nm} \\ v_{11} & v_{12} & .. & v_{1m} & 0 & .. & 0 \\ : & : & : & : & : & : & : \\ v_{m1} & v_{m2} & .. & v_{mm} & 0 & .. & 0 \end{vmatrix}.$$

Interessant sind in der Elektrodynamik und der allgemeinen Relativitätstheorie geränderte Determinanten der Form

$$|A_+| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ v_1 & v_1 & v_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nach BOCHER [2] [54.] ist die adjungierte Form

$$(1) \qquad \sum_1^n a_{ij} x_i x_j \tag{1.1}$$

und das skalare Produkt

$$(2) \qquad \sum_1^n u_i x_j \tag{1.2}$$

von besonderem Interesse. Der Ausdruck

$$\sum_1^n A_{ij} u_i u_j \tag{1.3}$$

geht für $n = 3$ über in

$$(3) \qquad \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} u_i u_j = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Das ist gerade die Grundform der Determinaten der elektro-magnetischen Feldmatrizen nach Minkowski [4]. Nach zweimaliger Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes für Determinanten folgt in den genannten Fällen zunächst

$$\sum_{i,j=1}^3 A_{ij} u_i u_j = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 A_{ij} u_i \right) u_j =$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & u_3 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & u_3 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \end{vmatrix}, \tag{1.5}$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{32} & a_{33} & u_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{33} & u_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & u_3 \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

Dann wird bei der zweiten Anwendung

$$u_1 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{32} & a_{33} & u_3 \end{vmatrix} = u_1^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + u_1 u_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + u_1 u_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \tag{1.7}$$

$$-u_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{33} & u_3 \end{vmatrix} = -u_2 u_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + u_2^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - u_2 u_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \tag{1.8}$$

$$u_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & u_3 \end{vmatrix} = u_3 u_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - u_3 u_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + u_3^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

Dazu schreibt Bocher:

> "*Die adjungierte Form (3) ist eine Invariante vom Gewicht zwei des Formenpaares (1), (2).*
>
> Insofern die u zu den x kontragredient sind, können wir die Form (3) auch als *Kontravariante* bezeichnen (§ 34)."

Bei den feldmatrizen sind verschwinden die Diagonalelemente a_{11}, a_{22}, a_{33}, so dass in den drei letzten Gleichungen nur die Nebendiagonalen wirken, und wenn diese zueinander nur das vorzeichen wechseln, kommt man zu

$$\sum_{i,j=1}^3 A_{ij} u_i u_j = u_1^2 \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ a_{32} & 0 \end{vmatrix} + u_2^2 \begin{vmatrix} 0 & a_{13} \\ a_{31} & 0 \end{vmatrix} + u_3^2 \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}, \tag{1.10}$$

$$= u_1^2 a_{23}^2 + u_2^2 a_{13}^2 + u_3^2 a_{12}^2 = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{23}^2 \\ a_{13}^2 \\ a_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x^2 & u_y^2 & u_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x^2 \\ a_y^2 \\ a_z^2 \end{pmatrix} . \tag{1.11}$$

Darin sind die a_x, a_y, a_z genau die Feldkomponenten der Rotation (Feldstärken) und die u_x, u_y, u_z die Komponenten der partiellen Zeitableitungen bzw. Divergenzen (Induktion bzw. Verschiebung). Auch dieses Ergebnis spricht für die dreidimensionale Welt.

1.2 Matrizen

Die lineare Algebra befasst sich u.a. mit Gleichungssystemen. Ein Hilfsmittel dazu sind Vektoren, Matrizen, Determinanten und Tensoren. Bereits in der Grundschule lernen die Schüler Gleichungen mit zwei Unbekannten auszurechnen

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & = & x' & , \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & y' & . \end{array} \tag{1.12}$$

Jede einzelne Gleichung ist das skalare Produkt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x', \qquad \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y'. \tag{1.13}$$

Auf diese Art lassen sich auch zwei Matrizen multiplizieren, wenn die erste in Zeilenvektoren und die zweite in Spaltenvektoren zerlegt wird

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Aus zwei $2x2$-Matrizen ergibt sich wieder eine $2x2$-Matrix, weil es eben zwei Zeilen- und zwei Spaltenvektoren gibt. Jedes Teilprodukt ist ein oben beschriebenes skalares Produkt.

Zunächst eliminieren wir y durch Multiplikation mit a_{22} bzw. $-a_{12}$ und Addition

$$\begin{array}{llcccccc} I & & a_{11}xa_{22} & + & a_{12}ya_{22} & = & & x'a_{22} & , \\ II & - & a_{21}xa_{12} & - & a_{22}ya_{12} & = & - & y'a_{12} & , \end{array} \tag{1.16}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x = a_{22}x' - a_{12}y'. \tag{1.17}$$

Für die zweite Lösung multiplizieren wir die erste Gleichung mit $-a_{21}$ und die zweite mit a_{11}

$$\begin{array}{llcccccc} I & - & a_{11}xa_{21} & - & a_{12}ya_{21} & = & - & x'a_{21} & , \\ II & & a_{21}xa_{11} & + & a_{22}ya_{11} & = & & y'a_{11} & , \end{array} \tag{1.18}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, y = -a_{21}x' + a_{11}y'. \tag{1.19}$$

Das Ergebniss sind

$$x = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}x' + \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}y', \tag{1.20}$$

$$y = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}x' + \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}y' \tag{1.21}$$

oder mit der Determinante

$$\triangle = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.22}$$

Diese Gleichungssysteme schreibt man wegen der Gleichartigkeit der Strukturen in der Matrizenrechnung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \frac{1}{\triangle'} \begin{pmatrix} a'_{22} & -a'_{12} \\ -a'_{21} & a'_{11} \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}' = \frac{1}{\triangle} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Will man nun die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ multiplizieren, geht es nach der Zeilen-Spalten-Regel nur mit

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xx' + yy', \tag{1.25}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}'^T A^{-1}\mathbf{x}'. \tag{1.27}$$

Auf diese wichtige Formel kommen wir bei späterer Gelegenheit zurück. Hierin sind

$$A = M, \qquad A^{-1} = M' \tag{1.28}$$

die sogenannten Fundamentaltensoren.

Die Multiplikation der beiden Matrizen ergibt

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\triangle} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{\triangle} \begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & a_{22}a_{12} - a_{12}a_{22} \\ -a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}. \tag{1.30}$$

Die Determinanten des Systems sind

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad \triangle' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{21}, \tag{1.31}$$

$$\triangle \cdot \triangle' = |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = \left|A \cdot A^{-1}\right| \cdot = \left|A^{-1} \cdot A\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{1.32}$$

mit

$$\triangle' = \frac{1}{\triangle}. \tag{1.33}$$

Das meint Einstein in der allgemeinen Relativitätstheorie [3] mit einem bekannten Satz von Jacobi. Die kurze Einführung in die Matrizenrechnung soll damit genügen, obwohl die Theorie umfangreicher ist.

1.3 Tensoren

Ein verwandter Begriff zu den Matrizen sind die Tensoren, werden aber in der Literatur als selbständiges Arbeitsmittel behandelt. Eine knappe Darstellung nach Schmutzer [5] mit Abwandlungen und eigenem Vergleich zu Matrizen ergibt:

Kontravariante Koordinatentransformation mit oberem Index

$$x^{j'} = x^{j'}\left(x^i\right) \equiv \mathbf{x}' = \mathbf{x}'\left(\mathbf{x}\right), \tag{1.34}$$

$$dx^{j'} = A_i^{j'} dx^i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} dx^i \equiv d\mathbf{x}' = Ad\mathbf{x}. \tag{1.35}$$

Umkehrung (Inversion)

$$dx^i = A^i_{k'} dx^{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} dx^{k'} \equiv d\mathbf{x} = A^{-1} d\mathbf{x'}. \quad (1.36)$$

Inversion nur möglich mit

$$det\left(A^{j'}_i\right) \neq 0 \equiv |A| \neq 0. \quad (1.37)$$

Determinantengleichung

$$det\left(A^{j'}_i\right) \cdot det\left(A^i_{k'}\right) = 1 \equiv |A| \cdot \left|A^{-1}\right|. \quad (1.38)$$

Invarianz der invertierten Tensoren

$$A^{j'}_i A^i_{k'} = \delta^{j'}_{k'} = \delta^j_k = A^j_{i'} A^{i'}_k \equiv AA^{-1} = \mathbb{I}. \quad (1.39)$$

Invarianz als ko- und kontravariantes skalares Produkt

$$dy_{j'} dx^{j'} = dy_j dx^j \quad (1.40)$$

Kovariante Koordinatentransformation mit unterem Index

$$y_{j'} = y_{j'}\left(y_i\right) \equiv \mathbf{y'}^T = \mathbf{y'}^T\left(\mathbf{y}^T\right), \quad (1.41)$$

$$dy_{j'} = dy_i A^i_{j'} \equiv d\mathbf{y'}^T = d\mathbf{y}^T A^{-1}. \quad (1.42)$$

Invarianz als ko- und kontravariantes skalares Vektorprodukt

$$dy_{j'} dx^{j'} = dy_i A^i_{j'} A^{j'}_i dx^i = dy_j \delta^j_j dx^j \equiv d\mathbf{y'}^T d\mathbf{x'} = d\mathbf{y}^T A^{-1} A d\mathbf{x} = d\mathbf{y}^T d\mathbf{x}. \quad (1.43)$$

Hier kommt bereits mit den gleichen Indizes der Schlips ins Rad, aber sonst kann man ohne Umbenennung nicht Multiplizieren.

Die äußerste wichtige Invarianzbedingung ist die Einfügung von

$$A^i_{j'} A^{j'}_i = \delta^j_j \equiv A^{-1} A = \mathbb{I}. \quad (1.44)$$

Invertierung

$$dy_i = dy_{j'} A^{j'}_i \equiv d\mathbf{y}^T = d\mathbf{y'}^T A. \quad (1.45)$$

Invarianz

$$dy_i dx^i = dy_{j'} A^{j'}_i A^i_{j'} dx^{jk'} \equiv d\mathbf{y}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{y'}^T AA^{-1} d\mathbf{x'}. \quad (1.46)$$

Man erkennt die Problematik der Transposition für den kovarianten Vektor mit unteren Indizes in einen kontravarianten Vektor und umgekehrt an dem einfachen Beispiel

$$\left(d\mathbf{y}^T d\mathbf{x}\right)^T = \left(d\mathbf{y'}^T AA^{-1} d\mathbf{x'}\right)^T = d\mathbf{x}^T d\mathbf{y} = d\mathbf{x'}^T \left(A^{-1}\right)^T A^T d\mathbf{y'} \quad (1.47)$$

$$d\mathbf{y} = A^T d\mathbf{y'}, \qquad d\mathbf{x}^T = d\mathbf{x'}^T \left(A^{-1}\right)^T. \quad (1.48)$$

Dier Zusammenhang der Invarianztheorie wird als *kontragrediente* Transformation der beiden Vektoren mit demselben Basistensor oder derselben Basismatrix bezeichnet. Ansonsten gibt es wohl keinen Unterschied zwischen der Matrizenrechnung und deren Stenografie der Tensorrechnung.[1]

[1] Einstein schrieb in den Sitzungsberichten der preußischen Akademie der Wissenschaften (Albert Einstein: Akademie-Vorträge, Herausgegeben von Dieter Simon, S. 74) unter dem Datum vom 4.11.1915:

"Daß die Relativität der Bewegung gemäß der neuen Theorie wirklich gewahrt ist, geht daraus hervor, daß unter den erlaubten Transformationen solche sind, die einer Drehung des neuen Systems gegen das alte mit beliebig veränderlicher Winkelgeschwindigkeit entsprechen, sowie solche Transformationen, bei welchen der Anfangspunkt des neuen Systems im alten System eine beliebig vorgeschriebene Bewegung ausführt.

In der Tat sind die Substitutionen

x' = x cos τ + y sin τ

2 Invariantentheorie

2.1 Zitate

David Hilbert hat sich gleichzeitig wie Einstein mit der allgemeinen Relativitätstheorie befasst. In einer seiner Schriften verweist er auf Maxime Bocher [2] “Einführung in die höhere Algebra”, eine Übersetzung aus dem Amerikanischen. Bemerkenswert ist im Abschnitt *Invarianten S. 95*

“Wir unterwerfen in den beiden Polynomen

$$(1) \qquad \begin{cases} A_1x & +B_1y & + & C_1 \\ A_2x & +B_2y & + & C_2 \end{cases}$$

die Veränderlichen (x, y) den Transformationen der Schar

$$(2) \qquad \begin{cases} x' & = & x\cos\theta & + & y\sin\theta & + & \alpha \\ y' & = & -x\sin\theta & + & y\cos\theta & + & \beta \end{cases} ,$$

wo α, β, θ Parameter sind, die beliebige Werte annehmen können. Die Transformation (2) führt die Polynome (1) über in

$$(3) \qquad \begin{cases} A_1'x' & +B_1'y' & + & C_1' \\ A_2'x' & +B_2'y' & + & C_2' \end{cases} .$$

Die Koeffizienten in (3) können leicht durch die von (1) und die Parameter α, β, θ ausgedrückt werden; es gelten dann die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} A_1'B_2' & -A_2'B_1' & = & A_1B_2 & -A_2B_1 \\ A_1'A_2' & +B_1'B_2' & = & A_1A_2 & +B_1B_2 \end{cases} .$$

Daher heißen die beiden Ausdrücke

$$(5) \qquad A_1B_2 \quad -A_2B_1, \qquad\qquad A_1A_2 \quad +B_1B_2$$

Invarianten des Systems (1) gegenüber den Transformationen der Schar (2)...”

“Diese algebraischen Invarianten spielen, wie wir sehen werden, auch in der Algebra eine wichtige Rolle. Als Beispiel erwähnen wir den Grad einer Form; er ist invariant gegenüber *allen* nicht-singulären linearen Transformationen.

1. Gegenüber den Transformationen von (2) sind

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Kovarianten des Systems $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

2. Gegenüber den Transformationen von (2) sind die Ausdrücke

$$A + C \quad \text{und} \quad B^2 - AC$$

Invarianten des Polynoms

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.\text{”}$$

---

y’ = - x sin τ + y cos τ
z’ =z
t’ = t
und
x’ = x - τ_1
y’ = y - τ_2
z’ = z - τ_3
t’ = t,
wobei τ bzw. τ_1 , τ_2 , τ_3 beliebige Funktionen von t sind, Substitutionen von der Determinante 1."

Die zweite Transformation ist die linare Galilei-Transformation und beide zusammen die Poincaré-Transformation.

Wo bleibt da Einsteins Beharren auf der Lorentz-Transformation?

2.2 Die Polynome

Die Polynome sind als skalare Produkte darstellbar

$$(1*)\quad \begin{cases} A_1x & +B_1y & + & C_1 & = & \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = 0 \\ A_2x & +B_2y & + & C_2 & = & \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}. \tag{2.1}$$

Sie sind Geradengleichungen in der HESSEschen Normalform

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1, \qquad \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_2} = 1 \tag{2.2}$$

mit den Achsenabschnitten

$$x_1 = -\frac{C_1}{A_1}, \qquad y_1 = -\frac{C_1}{B_1}, \tag{2.3}$$

$$x_2 = -\frac{C_2}{A_2}, \qquad y_2 = -\frac{C_2}{B_2}. \tag{2.4}$$

Die beiden Geradengleichungen (1∗) lassen sich verschieden miteinader zu einem Kegelschnitt aus den beiden sich kreuzenden Geraden multiplizieren, u.a.

- als normales Produkt

$$f = (A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{2.5}$$

$$A_1A_2x^2 + (A_1B_2 + A_2B_1)xy + B_1B_2y^2 + (A_1C_2 + A_2C_1)x + (B_1C_2 + B_2C_1)y + C_1C_2 = 0; \tag{2.6}$$

- als Produkt der zugehörigen Vektoren in der Reihefolge 1,2

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1A_2 & A_1B_2 & A_1C_2 \\ B_1A_2 & B_1B_2 & B_1C_2 \\ C_1A_2 & C_1B_2 & C_1C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0; \tag{2.7}$$

- als Produkt der zugehörigen Vektoren in der Reihefolge 2,1

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2A_1 & A_2B_1 & A_2C_1 \\ B_2B_1 & B_2B_1 & B_2C_1 \\ C_2A_1 & C_2B_1 & C_2C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0; \tag{2.8}$$

- als symmetrische Matrixgleichung (quadratische Form)

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{2.9}$$

$$f = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{matrix} & Ax^2 & + & Byx & + & Dx & + \\ + & Bxy & + & Cy^2 & + & Ey & + \\ + & Dx & + & Ey & + & F & \end{matrix}\right\} = 0; \tag{2.10}$$

- als Kegelschnittgleichung [1] mit der Transformation

$$(2)\quad \begin{cases} x & = & x'\cos\theta & - & y'\sin\theta \\ y & = & x'\sin\theta & + & y'\cos\theta \end{cases}, \quad , \qquad \tan 2\theta = \frac{2B}{A-C} \tag{2.11}$$

kommt man auf

$$ax'^2 + cy'^2 + 2dx' + 2ey' + f = 0, \tag{2.12}$$

$$a\left(x'^2 + 2\frac{d}{a}x' + \left(\frac{d}{a}\right)^2\right) + c\left(y'^2 + 2\frac{e}{c}y' + \left(\frac{e}{c}\right)^2\right) + f - \frac{d^2}{a} - \frac{e^2}{c} = 0, \tag{2.13}$$

$$\frac{\left(x' + \frac{d}{a}\right)^2}{c} + \frac{\left(y' + \frac{e}{c}\right)^2}{a} = -\frac{f - \frac{d^2}{a} - \frac{e^2}{c}}{ac}. \tag{2.14}$$

Zwei sich schneidende Geraden sind als entartete Hyperbeln aufzufassen. Wir finden hier die Gleichung (1.27) für Dreier-Vektoren ohne die Inversion wieder. Eine quadratische Form kann man im Matrizenkalkül kurz schreiben

$$f = \mathbf{x}^T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0. \tag{2.15}$$

Mit dem dyadischen Produkt erhält man eine matrix bzw. einen Tensor

$$M = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2^T = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Die entstehenden Matrizen aus den dyadischen Produkten sind zueinander transponiert. Die Matrixelemente der Hauptdiagonale bestimmen die Quadrate aus dem Produktpolynom, während die anderen Elemente immer zu zweit einen Summanden mit den Mischprodukten ergeben.

Die aus der quadratischen Form entstandene vollständige quadratische Gleichung beschreibt je nach den Komponenten der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ die verschiedenen Kegelschnitte. Die Matrix M ist die Diskriminante der quadratischen Form. Statt der Geradengleichungen mit den Variablen x, y lassen sich analoge Überlegungen auch für die Ebenengleichungen mit drei Variablen x, y, z anstellen, und man kommmt nach der Multiplikation auf die Gleichungen von Flächen zweiter Ordnung im Raum, speziell bei geschlossenen Sphären zu Ellipsoiden.

Wir berechnen die beiden Ausdrücke durch Ausmultiplikation

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_2^2 + 2x_2x_1 + x_1^2 + y_2^2 + 2y_2y_1 + y_2^2, \tag{2.17}$$

und mit der Determinantenformel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_21 + y_11x_3 + 1x_2y_3 - x_11y_3 - y_1x_21 - 1y_2x_3 \tag{2.18}$$

oder mit der Entwicklung nach Laplace nach der letzten Spalte durch Bildung der Untermatrizen

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & 1 \\ x_2 & y_2 & \\ x_3 & y_3 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \\ & & 1 \\ x_3 & y_3 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \\ x_2 & y_2 & \\ & & 1 \end{vmatrix}, \tag{2.19}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \tag{2.20}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - y_2x_3) + (y_1x_3 - x_1y_3) + (x_1y_2 - y_1x_2). \tag{2.21}$$

2.3 Die Poincaré-Transformation

Die Transformation (2) formen wir durch Ergänzung einer dritten Zeile um in

$$(2*) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x\cos\theta & + & y\sin\theta & + & \alpha \\ y' & = & -x\sin\theta & + & y\cos\theta & + & \beta \\ 1 & = & 1 & & & & \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \alpha \\ -\sin\theta & \cos\theta & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

$$\mathbf{x}' = G\mathbf{x}. \tag{2.23}$$

Die Determinante der Matrix G kann nach der letzten Zeile entwickelt werden und ist 1. Die Inverse ist

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

$$\triangle = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \tag{2.25}$$

d.h. α, β werden mit

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha' \\ -\beta' \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

einer Drehspiegelung unterworfen. Für $\theta = 0$ geht die Transformation (2) in die Galilei-Transformation über

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Das Produkt $G^{-1}G$ lässt sich leicht ausrechnen

$$G^{-1}G = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & -\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \alpha \\ -\sin\theta & \cos\theta & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Die Erweiterung um eine zusätzliche Komponente z und die Umwandlung der 1 in einen Parameter ct, dem man die Bedeutung *Lichtgeschwindigkeit * Zeit* zuweisen kann, ist unmittelbar einzusehen. Dann sind α und β auf c bezogene Geschwindigkeiten. Entgegen späteren Beispielen der Transformations- und Invariantentheorie in der mathematischen Literatur ist Bocher offensichtlich einer der wenigen Autoren, die diese sogenannte Poincaré-Transformation, bestehend aus Rotation und Translation, erläutern, denn sie passt so gar nicht in den Rahmen der speziellen Relativitätstheorie.

References

[1] *Kleine Enzyklopädie Mathematik.* VEB Bibliographisches Institut, 1968

[2] Bocher, M.: *Einführung in die höhere Algebra.* Teubner, 1910

[3] Einstein, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik* 49 (1916), S. 769–822

[4] Minkowski, Hermann: Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. In: *Nachr.d. Kgl.Ges. d. Wiss.* (1907), Dezember

[5] Schmutzer, Ernst: *Grundlagen der Theoretischen Physik.* Bd. I u. II. WILEY-VCH, 2005