Mathematische Grundlagen der Relativitätstheorien - Der Minkowski-Tensor -

Wolfgang Lange

25. September 2014

1 Der Minkowski-Tensor

Der MINKOWSKI-Tensor ist eine hochtrabende Begriffsbildung für die Matrix einer quadratischen Form zur Beschreibung einer Kugel in Mittelpunktslage

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \tag{1.1}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \tag{1.2}$$

mit $r = ct$. Diese einfache quadratische Gleichung lässt sich unterschiedlich darstellen als reelles konjugiertes oder komplexes symmetrisches Skalarprodukt sowie als quadratische Form

$$\begin{pmatrix} x & y & z & ct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & ict \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z & ct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0. \tag{1.4}$$

STEPHEN HAWKING schreibt in seiner Autobiographie [2] u.a. über seine Arbeiten mit der *imaginären Zeit*:

> "..., man kann sie sich wie eine Zeit vorstellen, die rechtwinklig zur Richtung der gewöhnlichen realen Zeit verläuft. ... Anfangs stieß ich damit auf großen Widerspruch, heute aber gilt er allgemein als der beste Weg zur Untersuchung der Quantengravitiation."

Es geht aber auch, wie die von EINSTEIN in der ART [1] verwendeten quadratischen Formen mit dem Fundamentaltensor zeigen, mit einer *reellen* Zeit.

Alle nur denkbaren Flächen zweiten Grades im dreidimensionalen EUKLIDischen Raum sind mittels 16 Werten vollständig bestimmt. Somit kommt die quadratische Form aus der Geometrie, und diese Flächen sind zweidimensional im dreidimensionalen EUKLIDischen Raum unabhängig von der Anwendung von 4x4-Matrizen und Vierer-Vektoren. Man kann auf diese Art auch eine Kugel- oder auch Ellipsoidengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{1.5}$$

durch simple Transformationen erhalten. Unendlich viele derartige Flächen mit unterschiedlichen differentiellen Dicken bilden ein dreidimensionales Volumen wie eine Zwiebel. Alles Andere ist Schnick-Schnack. Ein aufgeblasener Luftballon ändert Form und Größe, aber seine Oberfläche ist und bleibt eine zweidimensionale Begrenzung des dreidimensionalen Volumens, auch wenn die geschlossene Form kein Ellipsoid ist. Bemerkenswert ist die Untersuchung von Grigorij Perelman, für die ihm die höchste Auszeichnung für Mathematiker, die Fields-Medaille, verliehen werden sollte, die er bekanntlich nicht annahm. Perelman verwendete den Ricci-Fluss, was das auch immer ist, benutzte wie Einstein die Tensorrechnung nach Ricci-Curbastro, aber keine allgemeine Relativitätstheorie. Das Getrommel der Relativisten wäre nicht zu überhören gewesen, es ist schlicht ausgeblieben.

In der Standardliteratur wird von der *Invarianz* der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \tag{1.6}$$

ausgegangen, wer sagt aber, dass

$$x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0, \qquad z' = z - z_0 \tag{1.7}$$

nicht erlaubt sei? Schließlich hat Lorentz [3] selbst diese Transformation angewendet, wenn er auch bei seiner Lorentz-Kontraktion geblieben ist. Minkowski [4] zitierte Poincaré [5]:

> "In einer ganz anderen Weise, als ich hier vorgehe, hat H. Poincaré (Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXI (1906), p. 129 das Newtonsche Attraktionsgesetz dem Relativitätspostulate anzupassen versucht.
>
> Ist $B*(x*, y*, z*, t*)$ ein fester Raum-Zeitpunkt, so soll der Bereich aller derjenigen Raum-Zeitpunkte $B(x, y, z, t)$ für die
>
> $$(23) \qquad (x - x*)^2 + (y - y*)^2 + (z - z*)^2 = (t - t*)^2, \qquad t - t* \geqq 0$$
>
> ist, das *Strahlgebilde* des Raum-Zeitpunktes $B*$ heißen."

Die vollständige Gleichung ist mit der Lichtgeschwindigkeit c

$$(x - x*)^2 + (y - y*)^2 + (z - z*)^2 = c^2 (t - t*)^2, \qquad t - t* \geq 0 \tag{1.8}$$

und mit

$$x(t, t*), \qquad y(t, t*), \qquad z(t, t*), \tag{1.9}$$

$$x*(t*) = v_x t*, \qquad y*(t*) = v_y t*, \qquad z*(t*) = v_z t*. \tag{1.10}$$

Die Lösung von Poincaré ergibt unendlich viel Kugeloberflächen mit den Mittelpunkten $x*, y*, z*$ und den Radien $c(t - t*)$. Sie entspricht genau der anerkannten Schallausbreitung von einer bewegten Schallquelle, ist also die klassische Lösung der Wellengleichung für bewegte Quellen. Eine entsprechende Darstellung findet man auch bei Sommerfeld [6].

Die quadratische Gleichung in den drei Formen

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = 0, \tag{1.11}$$

$$(x - v_x t*)^2 + (y - v_y t*)^2 + (z - v_z t*)^2 = c^2 (t - t*)^2, \qquad t \geq t*, \tag{1.12}$$

$$x^2 - 2xv_x t * + v_x^2 t *^2 + y^2 - 2yv_y t * + v_y^2 t *^2 + z^2 - 2zv_z t * + v_z^2 t *^2 - c^2 \left(t^2 - 2tt * + t*^2\right) = 0 \tag{1.13}$$

ist eine quadratische Form mit 12 Summanden, und wenn die vier gemischten Glieder doppelt gezählt werden, sind das gerade $4 * 4 = 16$ Summanden. Da es aber fünf Variable $x, y, z, t, t*$ sind, kann man daraus eine quadratische Form mit einer $5x5$-Matrix konstruieren

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t & t* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -v_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -v_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -v_z \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 & c^2 \\ -v_x & -v_y & -v_z & c^2 & v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ t* \end{pmatrix} = 0. \tag{1.14}$$

Jedes Produkt der Form vt und $vt*$ ist auch

$$vt = \frac{v}{c}ct = \overline{v}ct, \qquad \text{bzw.} \qquad vt* = \frac{v}{c}ct* = \overline{v}ct*, \tag{1.15}$$

und die quadratische Form wird

$$\begin{pmatrix} x & y & z & ct & ct* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\overline{v}_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\overline{v}_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\overline{v}_z \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -\overline{v}_x & -\overline{v}_y & -\overline{v}_z & 1 & \overline{v}_x^2 + \overline{v}_y^2 + \overline{v}_z^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \\ ct* \end{pmatrix} = 0. \tag{1.16}$$

Das letzte Element der Matrix ist

$$M_{55} = \overline{v}_x^2 + \overline{v}_y^2 + \overline{v}_z^2 - 1 = \overline{v}^2 - 1 = -\left(1 - \overline{v}^2\right) = -\left(\sqrt{1 - \overline{v}^2}\right)^2 \tag{1.17}$$

und enthält das Quadrat des Lorentz-Faktors

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \tag{1.18}$$

Im Abschnitt ... **??** stoßen wir auf diese Matrix ohne die Zeile 4 und Spalte 4 als Produkt von drei Matritzen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\overline{v}_x \\ 0 & 1 & 0 & -\overline{v}_y \\ 0 & 0 & 1 & -\overline{v}_z \\ -\overline{v}_x & -\overline{v}_y & -\overline{v}_z & -\left(1 - \overline{v}^2\right) \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Der Rang der Matrix ist vier, denn man kann die ersten drei Zeilen mit $-\overline{v}_x$, $-\overline{v}_y$ bzw. $-\overline{v}_y$ und die vierte Zeile mit -1 multiplizieren. Die Summe dieser Zeilen ergibt die fünfte, linear abhängige Zeile. Dasselbe gilt für die Spalten. Somit ist die Determinante Null.

Der Tensor der Kugel kann auch für den d'Alembert-Operator

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

verwendet werden. Minkowski symmetrierte die Gleichung mittels der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$, was mit der quadratischen Form, dem besprochenen Minkowski-Tensor, verhindert werden kann

$$\Box = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{i\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{i\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Die quadratische Form selbst enthält jeweils ein Produkt und eine Transformation

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \left[M \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T M\right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}. \tag{1.22}$$

Der D'ALEMBERT-Operator entpuppt sich damit als Produkt des Vierervektors mit nur positiven Vorzeichen mit seinem konjugierten Vierervektor mit einem negativen Vorzeichen vor der partiellen Zeitableitung, denn es ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{c\partial t'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

References

[1] EINSTEIN, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik* 49 (1916), S. 769–822

[2] HAWKING, St.: *Meine kurze Geschichte.* Rowohlt, 2013. – 150 S.

[3] LORENTZ, H.A.: Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. In: *Prooceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences* 6 (1904), Nr. 2, S. 809–831

[4] MINKOWSKI, Hermann: Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. In: *Nachr.d. Kgl.Ges. d. Wiss.* (1907), Dezember

[5] POINCARÉ, H.: Sur la dynamique de l'èlectron. In: *Rend. d. Circolo matem. di Palermo* 21 (1906), S. 129–176

[6] SOMMERFELD, A.: Simplified Deduction of the Field and the Forces of an Electron, moving in any giving way. In: *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences* VII (1905), Nr. 1, S. 346–367