Mathematische Grundlagen der Relativitätstheorien

Wolfgang Lange

21. September 2014

1 Einleitung

Die spezielle Relativitätstheorie von Albert Einsten [1] wurde auf der Grundlage der beiden Ausdrücke

$$V+v, \qquad V-v \tag{1.1}$$

und einer fraglichen partiellen Differentialgleichung entwickelt, auf die in der umfangreichen Literatur über die Relativitätstheorien meines Wissens niemals wieder zurückgegriffen wurde. Einstein selbst bezog sich schon bald auf die Lorentz-Transformation von Hendrik Antoon Lorentz [4, 5], die dieser ausgehend von der Galilei-Transformation erarbeitet hatte. Lorentz verwies in späteren Schriften, z.B. [6], stets auf seine beiden ersten Bücher. Auch Henri Poincaré nahme die Lorentz-Transformation als gegeben hin.

Bei Lorentz heißt es in "Versuch ..." § 19:

> "Durch $\mathfrak{v}$ soll nicht mehr die wirkliche Geschwindigkeit, sondern die Geschwindigkeit der soeben genannten relativen Bewegung dargestellt werden. Die wirkliche Geschwindigkeit ist somit
>
> $$\mathfrak{p}+\mathfrak{v},$$
>
> und ist hierdurch $\mathfrak{v}$ in den Gleichungen ... zu ersetzen."

Dieser Satz beschreibt die Galilei-Transformation.

> "Ausserdem hat man statt der Differentialquotienten nach x, y, z und t solche nach $(x), (y), (z)$ und t einzuführen.
>
> Die erstgenannten Differentialquotienten bezeichne ich mit
>
> $$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z},\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1,$$
>
> die letztgenannten dagegen mit
>
> $$\frac{\partial}{\partial (x)},\ \frac{\partial}{\partial (y)},\ \frac{\partial}{\partial (z)},\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2.$$
>
> Es ist nun, in Anwendung auf eine beliebige Function,
>
> $$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial (x)},\ \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial (y)},\ \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial (z)},$$
>
> $$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2-\mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial (x)}-\mathfrak{p}_y\frac{\partial}{\partial (y)}-\mathfrak{p}_z\frac{\partial}{\partial (z)}\text{''}.$$

Die letzte Operator-Gleichung ist die vollständige Ableitung einer Funktion von x, y, z, t nach der Zeit t

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.2}$$

Zusammen mit den drei anderen Gleichungen ist das die zur GALILEI-Transformation *kontragrediente (kovariante)* Transformation

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\,(x)} \\ \frac{\partial}{\partial\,(y)} \\ \frac{\partial}{\partial\,(z)} \\ \left(\frac{\partial}{V\partial t}\right)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mathfrak{p}_x}{V} & \frac{\mathfrak{p}_y}{V} & \frac{\mathfrak{p}_z}{V} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial}{V\partial t}\right)_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial}{V\partial t}\right)_2 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

aber diese Erkenntnis nützte mir zunächst überhaupt nichts. Selbst 1921 äußerte sich EINSTEIN bei seinen Vorträgen in Princeton [3] S. 29:

> "*Die* MAXWELL-LORENTZ*schen elektromagnetischen Feldgleichungen sind bezüglich* GALILEI-*Transformationen nicht kovariant.*"

Diese beiden Aussagen haben mich jahrelang beschäftigt. Trotz vieler Studien in entsprechenden Lehrbüchern, Diskussionen in Internet-Foren und Befragung verschiedener Mathematiker und Physiker (einschließlich Professoren) dauerte der Erkenntnisprozess sehr lange. U.a. habe ich für lange Zeit kurz nach dem angeführten LORENTZ-Zitat das Studium dieses Buches abgebrochen, obwohl mir im § 31 auf S. 50 folgendes Zitat auffiel:

> "Es ist nun
>
> $$(35) \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)' - \frac{p_x}{V^2}\frac{\partial}{\partial t'}, \quad \text{u.s.w.}$$
>
> und
>
> $$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \ldots"$$

Die Umsetzung dieses Zitates ist mit der vorigen Transformation verwandt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{V\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\mathfrak{p}_x}{V} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\mathfrak{p}_y}{V} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\mathfrak{p}_z}{V} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)' \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)' \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)' \\ \frac{\partial}{V\partial t'} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

und das ist die *kogrediente (kontravariante)* GALILEI-Transformation. Damit hat eigentlich LORENTZ bereits in seinem Buch über die Erfindung der LORENTZ-Transformation die Axt an die spezielle Relativitätstheorie gelegt.

Kovariante und kontravariante Transformationen sind bei ALBERT EINSTEINs allgemeiner Relativitätstheorie [2, 3] und in nachfolgenden Büchern von HERMANN WEYL [8] und ERWIN SCHRÖDINGER [7] die nicht verstandenen Schlüsselwörter.

References

[1] EINSTEIN, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. In: *Annalen der Physik* 17 (1905), S. 891–921

[2] EINSTEIN, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik* 49 (1916), S. 769–822

[3] EINSTEIN, A.: *Grundzüge der Relativitätstheorie*. Springer-Verlag, 1922. – 7. Auflage 2009

[4] LORENTZ, H.A.: *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvmants*. E. J. BRILL, 1892

[5] LORENTZ, H.A.: *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*. E. J. BRILL, 1895(2005)

[6] LORENTZ, H.A.: Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie.. In: *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* V.2 (1904), S. 145–288

[7] SCHRÖDINGER, E.: *Die Struktur der Raum-Zeit*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1987

[8] WEYL, Hermann: *Raum - Zeit - Materie*. Springer-Verlag, 1988. – 348 S.