Tensor- und Matrix-Differentiation

Wolfgang Lange

10. November 2014

1 Tensor- und Matrix-Differentiation

In der allgemeinen Relativitätstheorie spielt die Differentiation von Vierervektoren eine bedeutende Rolle. An Hand des Originals von Albert Einstein [3] wird die Interpretation der kompliziert erscheinenden Regeln mittels der Matrizenrechnung untersucht. Ein endgültiges Ergenbis steht wegen der Christoffelschen Symbole noch aus.

1.1 Die erste Ableitung und das vollständige Differential

1.1.1 Zitat

§ 10. Die Bildung von Tensoren durch Differentiation.

Gestützt auf die Gleichung der geodätischen Linie können wir nun leicht die Gesetze ableiten, nach welchen durch Diffe- rentiation aus Tensoren neue Tensoren gebildet werden können. Dadurch werden wir erst in den Stand gesetzt, allgemein kovariante Differentialgleichungen aufzustellen. Wir erreichen dies Ziel durch wiederholte Anwendung des folgenden einfachen Satzes.

Ist in unserem Kontinuum eine Kurve gegeben, deren Punkte durch die Bogendistanz s von einem Fixpunkt auf der Kurve charakterisiert sind, ist ferner φ eine invariante Raumfunktion, so ist auch $d\varphi/ds$ eine Invariante. Der Beweis liegt darin, daß sowohl $d\varphi$ als auch ds Invariante sind.

Da

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds},$$

so ist auch

$$\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

eine Invariante, und zwar für alle Kurven, die von einem Punkte des Kontinuums ausgehen, d. h. für beliebige Wahl des Vektors der dx_μ. Daraus folgt unmittelbar, daß

$$(24) \qquad A_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

ein kovarianter Vierervektor ist (Gradient von φ).

1.1.2 Kommentar

Die erste Gleichung ist die Differentiation einer Funktion $\varphi\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ und in dem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum ist $\varphi = \varphi\,(x, y, z, t)$, worin für t auch ct verwendet werden kann. ds soll darin das vierdimensionale Liniendifferential sein, worüber wir hier zunächst nicht diskutieren. Es wird jedoch angenommen, dass alle vier Parameter von ds abhängen sollen, was natürlich physikalisch fragwürdig ist. Durch Multiplikation mit ds wird

$$\frac{d\varphi}{ds}ds = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}ds = d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}dx_\mu, \tag{1.1.1}$$

und das ist das vollständige Differential der Funktion φ

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{pmatrix}, \tag{1.1.2}$$

$$d\varphi = D\varphi = \left[\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)^T d\mathbf{x}\right]\varphi = \left[d\mathbf{x}^T\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right]^T\varphi = \left[d\mathbf{x}^T\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right]\varphi \tag{1.1.3}$$

worin die Differentiale dx, dx, dz, dt in erster Näherung konstant gehalten werden. Diese Formel kennt jeder Physik- und Technikstudent aus der Fehleranalyse nach Gauss. Gewöhnlich fragt man nach der vollständigen Ableitung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi \tag{1.1.4}$$

oder in Kurzfom

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\varphi. \tag{1.1.5}$$

Allgemein ist nämlich $ds = f\,(dx, dy, dz, dt)$. Wenn φ eine invariante Raumfunktion sein soll, erübrigt sich jede Differentiation. Die von Einstein beschworenen Mathematiker, sein Freund Grossmann, Hilpert und auch Smirnow sprehen übereinstimmend von invarianten vollständigen Differentialen gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen. Das ist auch verständlich, würde nämlich φ nur von x abhängen, würde es nach einer Drehung von x in x' sowohl von x als auch von y und/oder z abhängen.

Die Invarianz des vollständigen Differentials bedeutet eine kontragediente Transformation der beiden Vierervektoren. Wir nennen Λ eine Transformationsmatrix für die Transformation

$$d\mathbf{x}' = \Lambda d\mathbf{x}, \qquad d\mathbf{x} = \Lambda^{-1}d\mathbf{x}' \tag{1.1.6}$$

und dann erreicht man Invarianz des $d\varphi$ nur mit

$$d\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)^T d\mathbf{x} = \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right)^T \Lambda\Lambda^{-1}d\mathbf{x}' = \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right)^T d\mathbf{x}', \tag{1.1.7}$$

also muss

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)^T = \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}\right)^T\Lambda, \qquad \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} = \Lambda^T\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'} \tag{1.1.8}$$

sien. Im Vergleich werden also die $d\mathbf{x}'$ mit Λ^{-1}, dagegen jedoch die $\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}$ mit Λ^T transformiert. Das nennt man eine *kontragrediente* Transformation der beiden Vierervektoren $d\mathbf{x}'$ und $\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}'}$. Dabei ist das Produkt $\Lambda\Lambda^{-1} = \mathbb{I}$ immer die Einheitsmatrix. Es lassen sich damit alle möglichen zueinander inverse Matrizen Λ und Λ^{-1} finden, sei es die Galilei-Transformation oder die von mir abgelehnte Lorentz-Transformation.

Den kovarianten Vektor mit unteren Indizes bezeichne ich mit einem kovarianten (Zeilen)-Vektor und den zweiten vektor in dem skalaren Produkt einen kontravarianten (Spalten)-Vektor, auch wenn es der allgemeinen Regel widerspricht. Schließlich lässt sich jede Matrixgleich transponieren, und ein Skalar ist eine 1x1-Matrix, die durch Transposition in sich selbst übergeht. Aus (24) erhält man

$$(24*) \qquad A_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix}, \tag{1.1.9}$$

und das ist multipliziert mit dem Spaltenvektor $\mathbf{b}$ der Basisvektoren

$$\begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & A_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 1\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{1.1.10}$$

$$A_\mu b^\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} b^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \varphi \mathbf{b} = \nabla_{(4)}\varphi = \mathrm{grad}_{(4)}\varphi \tag{1.1.11}$$

ein wirklicher Vierergradient im Sinne der HAMILTONschen Quaternionen. In der ART ist es üblich, die Basisvektoren wegzulassen, und selbst $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ als kovarianten Gradienten zu bezeichnen.

1.2 Die zweite Ableitung

1.2.1 Zitat

Nach unserem Satze ist ebenso der auf einer Kurve genommene Differentialquotient

$$\chi = \frac{d\psi}{ds}$$

eine Invariante. Durch Einsetzen von ψ erhalten wir zunächst

$$\chi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{d^2 x_\mu}{ds^2}.$$

1.2.2 Kommentar

Die zweite Gleichung ist eine quadratische Form, und nach den Regeln der Tensoralgebra muss sein

$$\chi = \frac{dx_\mu}{ds}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\mu \partial x_\nu}\frac{dx^\nu}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{d^2 x^\mu}{ds^2}, \tag{1.2.1}$$

weil nur ein unterer und ein oberer Index sich gegenseitig aufheben können. Alles Andere ist nicht logisch. Damit wird nach Multiplikation mit ds^2

$$\chi\,(ds)^2 = dx_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right) dx^\nu + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} d^2 x^\mu, \tag{1.2.2}$$

$$dx_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right) dx^\nu = \begin{pmatrix} dx & dy & dz & dt \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{pmatrix}, \tag{1.2.3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} d^2 x^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2x \\ d^2y \\ d^2z \\ d^2t \end{pmatrix}. \tag{1.2.4}$$

Hierin ist

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{1.2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial z} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial t} \end{pmatrix} \tag{1.2.6}$$

ein Tensor der Stufe 2. In Matrizenschreibweise ist

$$\chi\,(ds)^2 = d\mathbf{x}^T\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right)d\mathbf{x} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\right)^T d^2\mathbf{x} \tag{1.2.7}$$

eine zur Tensorschreibweise äquivalente Gleichung, die jetzt einfach nach ds^2 zu differenzieren ist

$$\chi = \frac{d\mathbf{x}^T}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right)\frac{d\mathbf{x}}{ds} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}. \tag{1.2.8}$$

Prinzipiell haben wir in dem ersten Term von $\chi\,(ds)^2$ das Operator-Produkt

$$d\mathbf{x}^T\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right)d\mathbf{x} = \left[d\mathbf{x}^T\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right]\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\right)^T d\mathbf{x}\right] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)^T d\mathbf{x}\right]^T\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)^T d\mathbf{x}\right]\varphi, \tag{1.2.9}$$

$$d\mathbf{x}^T\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\right)^T\right)d\mathbf{x} = DD^T\varphi = D^2\varphi \tag{1.2.10}$$

als zweifaches bzw. quadratisches vollständiges Differential, und das ist

$$d^2\varphi = D^2\varphi = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z} + dt\frac{\partial}{\partial t}\right)^2, \tag{1.2.11}$$

$$d^2\varphi = \left\{\begin{array}{cc} dx\frac{\partial}{\partial x} & \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z} + dt\frac{\partial}{\partial t}\right) + \\ + \; dy\frac{\partial}{\partial y} & \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z} + dt\frac{\partial}{\partial t}\right) + \\ + \; dz\frac{\partial}{\partial z} & \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z} + dt\frac{\partial}{\partial t}\right) + \\ + \; dt\frac{\partial}{\partial t} & \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z} + dt\frac{\partial}{\partial t}\right) \end{array}\right\}, \tag{1.2.12}$$

$$d^2\varphi = \begin{pmatrix} dx & dy & dz & dt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial x\partial t} \\ \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y\partial t} \\ \frac{\partial^2}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z\partial t} \\ \frac{\partial^2}{\partial t\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial t\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial t\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial t\partial t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{pmatrix}\varphi, \tag{1.2.13}$$

$$d^2\varphi = dx^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + t^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} +$$
$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial t} + 2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + 2\frac{\partial^2}{\partial y\partial t} + 2\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}. \tag{1.2.14}$$

Dieser Anteil gilt für konstante $d\mathbf{x}$, aber bei veränderlichen Komponenten kommt der zweite Summand mit den zweiten Ableitungen von $d\mathbf{x}$ hinzu [5, 4]. Dieser ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}d^2x^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d^2x \\ d^2y \\ d^2z \\ d^2t \end{pmatrix} = d^2x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + d^2y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + d^2z\frac{\partial\varphi}{\partial z} + d^2t\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{1.2.15}$$

1.2.3 Zitat

Hieraus läßt sich zunächst die Existenz eines Tensors nicht ableiten. Setzen wir nun aber fest, daß die Kurve, auf welcher wir differenziiert haben, eine geodätische Kurve sei, so erhalten wir nach (22) durch Ersetzen von d^2x_μ/ds^2

$$\chi = \left\{ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau} \right\} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

Aus der Vertauschbarkeit der Differentiationen nach μ und ν und daraus, daß gemäß (23) und (21) die Klammer $\left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\}$ bezüglich μ und ν symmetrisch ist, folgt, daß der Klammerausdruck in μ und ν symmetrisch ist. Da man von einem Punkt des Kontinuums aus in beliebiger Richtung eine geodätische Linie ziehen kann, dx_μ/ds also ein Vierervektor mit frei wählbarem Verhältnis der Komponenten ist, folgt nach den Ergebnissen des § 7, daß

$$(25) \qquad A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}$$

ein kovarianter Tensor zweiten Ranges ist. Wir haben also das Ergebnis gewonnen: Aus dem kovarianten Tensor ersten Ranges

$$A_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

können wir durch Differentiation einen kovarianten Tensor zweiten Ranges

$$(26) \qquad A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} A_\tau$$

bilden.

1.2.4 Kommentar

Nach der Annahme von Einstein, sei der zweite Anteil von χ

$$\left(\chi = \frac{dx_\mu}{ds}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\mu \partial x_\nu}\frac{dx^\nu}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\right) - \left(\chi = \left\{ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau} \right\} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\right), \qquad (1.2.16)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0. \qquad (1.2.17)$$

Es besteht die Notwendigkeit, die CHRISTOFFELschen Symbol [2] näher zu untersuchen. Schon allein (21) - (23) aus § 9 erzeugen Schwierigkeiten in der Schreibweise

$$(21) \qquad \left[{\mu\nu \atop \sigma} \right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right), \qquad (1.2.18)$$

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 x_\tau}{ds^2} + \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0, \qquad (1.2.19)$$

$$(23) \qquad \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} = g^{\tau\alpha} \left[{\mu\nu \atop \alpha} \right] \qquad (1.2.20)$$

in der Interpretation.

1.2.5 Zitat

Wir nennen den Tensor $A_{\mu\nu}$ die „Erweiterung“ des Tensors A_μ . Zunächst können wir leicht zeigen, daß diese Bildung auch dann auf einen Tensor führt, wenn der Vektor A_μ nicht als ein Gradient darstellbar ist. Um dies einzusehen, bemerken wir zunächst, daß

$$\psi \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

ein kovarianter Vierervektor ist, wenn ψ und φ Skalare sind. Dies ist auch der Fall für eine aus vier solchen Gliedern bestehende Summe

$$S_\mu = \psi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_\mu} + . + . + \psi^{(4)} \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_\mu}$$

falls $\psi^{(1)}\varphi^{(1)}....\psi^{(4)}\varphi^{(4)}$ Skalare sind. Nun ist aber klar, daß sich jeder kovariante Vierervektor in der Form S_μ darstellen läßt. Ist nämlich $A_\mu$ein Vierervektor, dessen Komponenten beliebig gegebene Funktionen der x_n sind, so hat man nur (bezüglich des gewählten Koordinatensystems) zu setzen

$$\begin{array}{rclcrcl} \psi^{(1)} & = & A_1, & & \varphi^{(1)} & = & x_1, \\ \psi^{(2)} & = & A_2, & & \varphi^{(2)} & = & x_2, \\ \psi^{(3)} & = & A_3, & & \varphi^{(3)} & = & x_3, \\ \psi^{(4)} & = & A_4, & & \varphi^{(4)} & = & x_4, \end{array}$$

um zu erreichen, daß S_μ gleich A_μ wird.

Um daher zu beweisen, daß $A_{\mu\nu}$ ein Tensor ist, wenn auf der rechten Seite für A_μ ein beliebiger kovarianter Vierervektor eingesetzt wird, brauchen wir nur zu zeigen, daß dies für den Vierervektor S_μ zutrifft. Für letzteres ist es aber, wie ein Blick auf die rechte Seite von (26) lehrt, hinreichend, den Nachweis für den Fall

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

zu führen. Es hat nun die mit ψ multiplizierte rechte Seite von (25)

$$\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}$$

Tensorcharakter. Ebenso ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

ein Tensor (äußeres Produkt zweier Vierervektoren). Durch Addition folgt der Tensorcharakter von

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) - \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \right).$$

Damit ist, wie ein Blick auf (26) lehrt, der verlangte Nachweis für den Vierervektor

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu},$$

und daher nach dem vorhin Bewiesenen für jeden beliebigen Vierervektor $A\mu$ geführt. $--$

1.2.6 Kommentar

Die Formel

$$S_\mu = \psi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_\mu} + . + . + \psi^{(4)} \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_\mu} \tag{1.2.21}$$

ist eine Transformation

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^{(1)} & \psi^{(2)} & \psi^{(3)} & \psi^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_4} & \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_4} \end{pmatrix}, \tag{1.2.22}$$

die mit der Variableneinsetzung die neue Form annimmt

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_4}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_3} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} & \frac{\partial x_4}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_4} & \frac{\partial x_2}{\partial x_4} & \frac{\partial x_3}{\partial x_4} & \frac{\partial x_4}{\partial x_4} \end{pmatrix}, \tag{1.2.23}$$

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}. \tag{1.2.24}$$

Das ist ein komisches Spiel des Herrn Einstein.

Wenn nach (26) $A_{\mu\nu}$ ein Tensor sein soll, müssen beide Terme auf der rechten Seite denselben Typ besitzen. $\{{}^{\mu\nu}_{\tau}\}\, A_\tau$ muss dann auch ein Tensor der Stufe 2 sein, womit $\{{}^{\mu\nu}_{\tau}\}$ ein Tensor der Stufe 3 sein muss. Es bleibt die Frage nach der Herunft, die an dieser Stelle nur angedeutet werden soll. Es sei lediglich ein Zitat von Bianchi [1] aufgeführt:

> "Zwei Differentialformen:
>
> $$f = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s, \qquad f' = \sum_{rs} a'_{rs} dx'_r dx'_s$$
>
> nennen wir äquivalent, ... Wir gehen zu diesem Zwecke von der Gleichung
>
> $$a'_{rs} = \sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s}$$
>
> aus und differenzieren dieselbe nach einer beliebigen von den Variablen x', z.B. nach x'_t; dann haben wir:"

Zwei Erkenntnisse:

- Einsteins Summenkonvention wurde schon 1899 in Deutschland ohne Bezug auf Tensoren gedruckt,
- Die Differentiation erfolgt nur nach einer einzigen Komponente (*nach einer beliebigen von den Variablen x'*) und nicht nach dem gesamten Vektor. Nichts mit Summenkonvention bei dieser Variablen.

Das lässt die Christoffelschen Symbole in einem ganz anderen Licht erscheinen. Das wird ein eigenes Kapitel.

1.2.7 Zitat

Mit Hilfe der Erweiterung des Vierervektors kann man leicht die „Erweiterung" eines kovarianten Tensors beliebigen Ranges definieren; diese Bildung ist eine Verallgemeinerung der Erweiterung des Vierervektors. Wir beschränken uns auf die Aufstellung der Erweiterung des Tensors zweiten Ranges, da dieser das Bildungsgesetz bereits klar übersehen läßt.

Wie bereits bemerkt, läßt sich jeder kovariante Tensor zweiten Ranges darstellen[1]als eine Summe von Tensoren vom Typus $A_\mu B_\nu$. Es wird deshalb genügen, den Ausdruck der Erweiterung für einen solchen

[1] 1) Durch äußere Multiplikation der Vektoren mit den (beliebig gegebenen) Komponenten A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} bzw. 1, 0, 0, 0 entsteht ein Tensor mit den Komponenten

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Durch Addition von vier Tensoren von diesem Typus erhält man den Tensor $A_{\mu\nu}$ mit beliebig vorgeschriebenen Komponenten.

speziellen Tensor abzuleiten. Nach (26) haben die Ausdrücke

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \left\{{\sigma\mu \atop \tau}\right\} A_\tau$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \left\{{\sigma\nu \atop \tau}\right\} B_\tau$$

Tensorcharakter. Durch äußere Multiplikation des ersten mit B_ν, des zweiten mit A_μ erhält man je einen Tensor dritten Ranges; deren Addition ergibt den Tensor dritten Ranges

$$(27) \qquad A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \left\{{\mu\nu \atop \tau}\right\} A_{\tau\nu} - \left\{{\sigma\nu \atop \tau}\right\} A_{\mu\tau},$$

wobei $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$ gesetzt ist. Da die rechte Seite von (27) linear und homogen ist bezüglich der $A_{\mu\nu}$ und deren ersten Ableitungen, führt dieses Bildungsgesetz nicht nur bei einem Tensor vom Typus $A_\mu B_\nu$, sondern auch bei einer Summe solcher Tensoren, d. h. bei einem beliebigen kovarianten Tensor zweiten Ranges, zu einem Tensor. Wir nennen $A_{\mu\nu\sigma}$ die Erweiterung des Tensors $A_{\mu\nu}$.

Es ist klar, daß (26) und (24) nur spezielle Fälle von (27) sind (Erweiterung des Tensors ersten bzw. nullten Ranges). Überhaupt lassen sich alle speziellen Bildungsgesetze von Tensoren auf (27) in Verbindung mit Tensormultiplikationen auffassen.

1.2.8 Kommentar

Die Bewertung von (27) kann erst nach der Klärung der CHRISTOFFELschen Symbole erfolgen.

Literatur

[1] BIANCHI, Luigi: *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* 1. Teubner, 1899. – 659 S.

[2] CHRISTOFFEL, E. B.: Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* Bd. 70 (1869), S. 46–70

[3] EINSTEIN, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik* 49 (1916), S. 769–822

[4] FELDVOSS, Jörg: Höhere Ableitungen impliziter Funktionen. In: - (-)

[5] SMIRNOW, W.I.: *Lehrgang der höheren Mathematik I.* Bd. I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956