Über die Maxwellschen Gleichungen

Dr.-Ing. Wolfgang Lange

8. November 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Seit der Entstehung der speziellen Relativitätstheorie striten Befürworter und gegner über die Längenkontraktion und die Zeitdilatation. Die Relativisten behaupten, diese Effekte seien von Hendrik Antoon Lorentz [5, 6] exakt berechnet worden, und die Antirelativisten äußern sich hauptsächlich in weitschweifigen verbalen Erklärungen, dass die spezielle Relativitätstheorie [2] und die allgemeine Realtivitätstheorie von Albert Einstein nur durch Verschwörungen einer zunächst kleinen Gruppe und hernach von vielen Physikern aus Angst um ihre Posten vertreten werden. Beide Parteien legen nach meinen Recherchen zu wenige ausreichend treffenden mathematischen Beweise vor. Auf Laborversuchen basierende Existenzbeweise werden offensichtlich nicht mit genügend Akuratesse geführt und sogar absichtlich fehlinterpretiert.

Mich bewog nach dem Ende meines Berufslebens die Frage nach der Richtigkeit des Lichtpostulates, der Abhängigkeit von Massen von der Geschwindigkeit und das Zwillingsparadoxon zu einer umfangreichen Suche in den mathematisch-physikalischen Lehrbüchern der Zeit um 1900. Nach anfänglichen Vermutungen erhärtete sich mein Standpunkt der Ablehnung der speziellen Relativitätstheorie, und weil die allgemeine Relativitätstheorie ausdrücklich auf der Grundlage der speziellen geschaffen wurde, habe ich mich erst in letzter Zeit auch damit befasst. Bei der Durcharbeit des *§ 20 Maxwellsche elektromagnetische Feldgleichungen für das Vakuum* fiel mir der enge Zusammenhang mit den klassischen Maxwellschen Gleichungen auf. Ein Aufsatz darüber ist in Arbeit.

Der vorliegende Artikel soll den Leser auf einige Aspekte der MAXWELLschen Gleichungen aufmerksam machen und dient gleichzeitig als Einleitung und Bezugrahmen für den erwähnten Aufsatz. Obwohl die MAXWELLschen Gleichungen hier nicht ausreichend behandelt wurden, stelle ich das derzeitige Ergebnis zur Diskussion.

2 Etwas Mathematik

2.1 Vektoranalysis

Die Differentialoperatoren der Vektoranalysis bestehen aus den Formeln

- Gradient grad φ

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{2.1.1}$$

und vierdimensional

$$\mathbf{b}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \varphi = \mathbf{b}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\varphi = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{c\partial t} \end{pmatrix} = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 1\frac{\partial\varphi}{c\partial t}. \tag{2.1.2}$$

- Divergenz div $\mathbf{a}$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \nabla\cdot\mathbf{a} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{2.1.3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x} & \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x} \\ \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y} & \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} & \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y} \\ \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial z} & \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial z} & \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \tag{2.1.4}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \tag{2.1.5}$$

- Rotation rot $\mathbf{a}$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \nabla\times\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \tag{2.1.6}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_z & -a_y \\ -a_z & 0 & a_x \\ a_y & -a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \tag{2.1.7}$$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right), \tag{2.1.8}$$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{2.1.9}$$

Mit diesen Grundformeln lassen sich alle weiteren Kombinationen ausrechnen, z.B.

$$\text{rot } \mathfrak{b} = \text{rot rot } \mathfrak{a}, \tag{2.1.10}$$

$$\text{rot } \mathfrak{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{b}_x & \mathfrak{b}_y & \mathfrak{b}_z \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad \text{rot } \mathfrak{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \end{vmatrix} \tag{2.1.11}$$

$$\text{rot } \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{b}_z & -\mathfrak{b}_y \\ -\mathfrak{b}_z & 0 & \mathfrak{b}_x \\ \mathfrak{b}_y & -\mathfrak{b}_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \tag{2.1.12}$$

$$\text{rot } \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & -\left(\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) \\ -\left(\frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) & -\left(\frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \tag{2.1.13}$$

oder

$$\text{rot } \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial z}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \tag{2.1.14}$$

Die Rotationsmatrix zerfällt in eine Differnz zweier Matrizen

$$\text{rot } \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} & \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} & \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y} & \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial y} & \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} & \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z} & \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} & \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y} & \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} & \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial y} & \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x} & \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} & \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \tag{2.1.15}$$

$$\text{rot } \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_x \\ \mathfrak{a}_y \\ \mathfrak{a}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{2.1.16}$$

rot $\mathfrak{h}$ besteht aus zwei quadratischen Formen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_x \\ \mathfrak{a}_y \\ \mathfrak{a}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \tag{2.1.17}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_x \\ \mathfrak{a}_y \\ \mathfrak{a}_z \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \tag{2.1.18}$$

$$\text{rot } \mathfrak{b} = \text{rot rot } \mathfrak{a} = \text{grad } [\text{div } \mathfrak{a}] - \triangle\mathfrak{a}. \tag{2.1.19}$$

Wenn $\mathfrak{b}$ ein quellenfreies Wirbelfeld ist, muss wegen div $\mathfrak{a} = 0$ die Induktion $\mathfrak{b}$ aus der POISSONgleichung des Vektorpotentials folgen

$$\text{rot } \mathfrak{b} = -\triangle\mathfrak{a}. \tag{2.1.20}$$

Dazu gehören die physikalischen Dimensionen

$$\text{rot} \left[\frac{1}{m}\right] \mathfrak{b} \left[\frac{Vs}{m^2}\right] = -\triangle \left[\frac{1}{m^2}\right] \mathfrak{a} \left[\frac{Vs}{m}\right]. \tag{2.1.21}$$

2.2 Raum-Zeit-Vektoren

Die Basisvektoren in der mathematischen vierdimensionalen Raum-Zeit sind einreihige Matrizen (Vektoren) mit den drei räumlichen Einheitsvektoren für die Richtungen und einne skalare Größe, z.B. für die Zeit,

$$\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

Es seien der kovariante Zeilenvektor und der kontravariante Spaltenvektor der partiellen Ableitungsoperatoreneinreihige Matrizen mit skalaren Komponenten

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \end{pmatrix}, \tag{2.2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_4} \end{pmatrix}. \tag{2.2.3}$$

Gegenüber der Indexzählweise bei MINKOWSKI wird hier weitestgehend die natürliche Bedeutung der Raum-Zeit-Komponenten ohne Index verwendet. Sie trennt die physikalische Bedeutung von Raum und Zeit. Die partielle Ableitung einer 4x4-Matrix M ist prinzipiell eine Transformation bzw. das innere Produkt eine Matix mit einem Vektor

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \cdot M^T\right]^T = \left\{M \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\}, \tag{2.2.4}$$

worin die geschweifte Klammer die rückwärtige Notierung sein soll. Die erste Form bezeichne ich als kovariante Differentiation

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \cdot M^T \tag{2.2.5}$$

und die zweite als kontravariante Transformation

$$\left\{M \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\}, \tag{2.2.6}$$

jenachdem der Differentialoperator ein Zeilen- oder ein Spaltenvektor ist. Die mathematisch inkorrekte Schreibweise des nachgestellten Operators ist als *“auf M angewendete Differentiation”* anzusehen.

Die Kugelgleichung der elektromagnetischen Ausbreitung

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \tag{2.2.7}$$

schreiben wir in der Form

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} x & y & z & ct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & -ct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{+T} \mathbf{x}, \tag{2.2.8}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z & ct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T G \mathbf{x} \tag{2.2.9}$$

und den d'Alembertoperator der allgemeinen Wellengleichung als

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^+} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^+}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T G \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = 0, \tag{2.2.10}$$

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial ct} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c \partial t} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.2.11}$$

Das Zeichen $^+$ markiert konjugierte Vektoren mit einem negativen Skalar, und G ist der bei Einstein zu Grunde gelegte Fundamentaltensor. Die einzige Aufgabe des Fundamentaltensors besteht in der Vorzeichendrehung im Sinne der konjugierten Vektoren.

2.3 Kontra- und kovariante Transformationen

Marcel Grossmann [4] und David Hilbert wie auch Smirnow [12] nennen übereinstimmend

- einen Geschwindigkeitsvektor *kontravariant*,
- einen Gradienten *kovariant*,
- das vollständige Differential einer Funktion *invariant*.

Die Differentiation mittelbarer Funktionen

$$f\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) \tag{2.3.1}$$

ergibt

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}, \tag{2.3.2}$$

oder nach Multiplikation mit dt das vollständige Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \tag{2.3.3}$$

$$df = \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz\right). \tag{2.3.4}$$

2.4 Vierer-Operatoren, Fundamentaltensor

Nach MINKOWSKI [10] wählen wir

- einen *kovarianten* Operator-Zeilen-Vektor

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \tag{2.4.1}$$

- und einen *kontravarianten* Operator-Spalten-Vektor

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix}, \tag{2.4.2}$$

und zusätzlich

- konjugierte Operatoren-Vektoren

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^+}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^+} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix}. \tag{2.4.3}$$

Das skalare Produkt

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^+} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}, \tag{2.4.4}$$

ist der D'ALEMBERT-Operator, der sich auch schreiben lässt als

$$\Box = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix}. \tag{2.4.5}$$

Diese Gleichung beinhaltet zwei Transformationen, eine kovariante

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \tag{2.4.6}$$

oder eine kontravariante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix}. \tag{2.4.7}$$

Deutlicher tritt das bei der Zerlegung des Fundamentaltensors in ein Matrizenprodukt auf,

$$F = \mathcal{F}^T \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/i \end{pmatrix}, \tag{2.4.8}$$

$$i = \sqrt{-1}, \qquad i^2 = -1, \tag{2.4.9}$$

und dann ist in

$$\Box = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/i \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \right] \tag{2.4.10}$$

die linke eckige Klammer eine kovariante Zeilen-Transformation

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial it} \end{pmatrix} \tag{2.4.11}$$

und die rechte eckige Klammer eine kontravariante Spalten-Transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial it} \end{pmatrix}, \tag{2.4.12}$$

womit die imaginäre Zeit mathematisch als brauchbares Hilfsmittel begründet ist. Der d'Alembert-Operator wird damit

$$\Box = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{c\partial it} \end{pmatrix}. \tag{2.4.13}$$

In der Kurzform ist also

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right)^T \mathbb{I} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \left(\mathcal{F}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathbb{I} \mathcal{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathcal{F}^T \mathbb{I} \mathcal{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathbb{I}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \tag{2.4.14}$$

mit der kontravarianten Transformation $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \mathcal{F}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ und der kovarianten Transformation $\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\right)^T = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathcal{F}^T$. Dann ist $\mathbb{I}'$ der Fundamentaltensor

$$\mathbb{I}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.15}$$

2.5 Der asymmetrische Sechser-Vektor

In den Relativitätstheorien spielen sogenannte Sechser-Vektoren eine Rolle, deren äquivalenter Aufbau eine asymmetrische Vierer-Matrix ist. In der Vereinfachung ist diese Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & -x \\ -Z & 0 & X & -y \\ Y & -X & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.1}$$

Die rechte Matrizen nennt man gerändert, hier mit einem positiven und einem negativen Vektor gleicher Elemente. Durch Multiplikation dieser Matrizen mit -1 ändert jedes Element sein Vorzeichen, und es wird

$$M^T = -M. \tag{2.5.2}$$

Nach Bocher [1] [54.] bildet der Ausdruck

$$\sum_1^n A_{ij} u_i u_j \tag{2.5.3}$$

die negative Determinante. Diese Formel ist vollständig

$$|A| = -\sum_{i=1}^n \left(u_i \sum_{j=1}^n A_{ij} u_j \right) = -\mathbf{u}^T K \mathbf{u}, \tag{2.5.4}$$

worin

$$K = \|A_{ij}\| \tag{2.5.5}$$

die Matrix der algebraischen Komplemente ist

$$A_{ij} = k_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|. \tag{2.5.6}$$

Die Determinate von M entwickeln wir nach Laplace mit den Elementen der rechten Spalte durch Bildung der Unterdeterminanten. Zunächst ist durch Streichen der Zeilen und Spalten für $-x, -y, -z$ die äquivalente Operation das Nullsetzen der verbliebenen Elemente

$$M = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & -x \\ -Z & 0 & X & -y \\ Y & -X & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.7}$$

$$|M| = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -x \\ -Z & 0 & X & 0 \\ Y & -X & 0 & 0 \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & Z & -Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \\ Y & -X & 0 & 0 \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & Z & -Y & 0 \\ -Z & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}, \tag{2.5.8}$$

und mittels Zeilenwechseln

$$|M| = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -x \\ -Z & 0 & X & 0 \\ Y & -X & 0 & 0 \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & Z & -Y & 0 \\ Y & -X & 0 & 0 \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -z \\ 0 & Z & -Y & 0 \\ -Z & 0 & X & 0 \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}, \tag{2.5.9}$$

$$|M| = x\begin{vmatrix} -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 0 & Z & -Y \\ Y & -X & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ x & y & z \end{vmatrix}, \tag{2.5.10}$$

$$|M| = x\left(zXZ + yXY + xX^2\right) - y\left(-yY^2 - zYZ - xXY\right) + z\left(xXZ + yYZ + zZ^2\right), \tag{2.5.11}$$

$$|M| = x^2X^2 + y^2Y^2 + z^2Z^2 + 2xXzZ + 2xXyY + 2yYzZ, \tag{2.5.12}$$

$$|M| = (xX + yY + zZ)^2 = \left[\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right]^2 = \left(\mathbf{x}^T\mathbf{X}\right)^2. \tag{2.5.13}$$

$$\sqrt{|M|} = xX + yY + zZ = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T\mathbf{X} = \mathbf{X}^T\mathbf{x}. \tag{2.5.14}$$

Die vollkommene Antisymmetrie drückt sich in folgenden Gleichungen aus

$$|M| = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{2.5.15}$$

$$|M| = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \tag{2.5.16}$$

$$|M| = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^2 & XY & XZ \\ YX & Y^2 & YZ \\ ZX & ZY & Z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \tag{2.5.17}$$

$$|M| = \left\{\begin{array}{ccccccc} & x^2X^2 & + & xXyY & + & xXzZ & + \\ + & yYxX & + & y^2Y^2 & + & yYzZ & + \\ + & zZxX & + & zZyY & + & z^2Z^2 & \end{array}\right\}, \tag{2.5.18}$$

$$|M| = x^2X^2 + y^2Y^2 + z^2Z^2 + 2xXyY + 2xXzZ + 2yYzZ, \tag{2.5.19}$$

$$|M| = (xX + yY + zZ)^2 = \left[\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right]^2 = \left(\mathbf{x}^T\mathbf{X}\right)^2. \tag{2.5.20}$$

Die Invertierte einer Matrix M mit den Elementen m_{ij} ergibt sich aus den adjungierten Matrizen M_{ij} zu den Elementen m_{ij}, die durch Streichen der Zeilen i und Spalten j entstehen. Die Elemente

$$k_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}| \tag{2.5.21}$$

der Matrix K nennt man die algebraischen Komplemente zu den m_{ij}. Dann ist K^T die adjungierte Matrix der Matrix M, und daraus ergibt sich die invertierte Matrix M^{-1}zu

$$M^{-1} = \frac{K^T}{|M|} \qquad \text{bzw.} \qquad \left(M^{-1}\right)^T = \frac{K}{|M|}. \tag{2.5.22}$$

Zunächst werden die entsprechenden Zeilen und Spalten gestrichen und die wechselweisen Vorzeichen festgelegt, woraus sich die k_{ij} ergeben

$$\left|\begin{array}{cccc}
+\begin{vmatrix} + & - & - & - \\ | & 0 & X & -y \\ | & -X & 0 & -z \\ | & y & z & 0 \end{vmatrix} &
-\begin{vmatrix} - & + & - & - \\ -Z & | & X & -y \\ Y & | & 0 & -z \\ x & | & z & 0 \end{vmatrix} &
+\begin{vmatrix} - & - & + & - \\ -Z & 0 & | & -y \\ Y & -X & | & -z \\ x & y & | & 0 \end{vmatrix} &
-\begin{vmatrix} - & - & - & + \\ -Z & 0 & X & | \\ Y & -X & 0 & | \\ x & y & z & | \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} | & Z & -Y & -x \\ + & - & - & - \\ | & -X & 0 & -z \\ | & y & z & 0 \end{vmatrix} &
+\begin{vmatrix} 0 & | & -Y & -x \\ - & + & - & - \\ Y & | & 0 & -z \\ x & | & z & 0 \end{vmatrix} &
-\begin{vmatrix} 0 & Z & | & -x \\ - & - & + & - \\ Y & -X & | & -z \\ x & y & | & 0 \end{vmatrix} &
+\begin{vmatrix} 0 & Z & -Y & | \\ - & - & - & + \\ Y & -X & 0 & | \\ x & y & z & | \end{vmatrix} \\
+\begin{vmatrix} | & Z & -Y & -x \\ | & 0 & X & -y \\ + & - & - & - \\ | & y & z & 0 \end{vmatrix} &
-\begin{vmatrix} 0 & | & -Y & -x \\ -Z & | & X & -y \\ - & + & - & - \\ x & | & z & 0 \end{vmatrix} &
+\begin{vmatrix} 0 & Z & | & -x \\ -Z & 0 & | & -y \\ - & - & + & - \\ x & y & | & 0 \end{vmatrix} &
-\begin{vmatrix} 0 & Z & -Y & | \\ -Z & 0 & X & | \\ - & - & - & + \\ x & y & z & | \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} | & Z & -Y & -x \\ | & 0 & X & -y \\ | & -X & 0 & -z \\ + & - & - & - \end{vmatrix} &
+\begin{vmatrix} 0 & | & -Y & -x \\ -Z & | & X & -y \\ Y & | & 0 & -z \\ - & + & - & - \end{vmatrix} &
-\begin{vmatrix} 0 & Z & | & -x \\ -Z & 0 & | & -y \\ Y & -X & | & -z \\ - & - & + & - \end{vmatrix} &
+\begin{vmatrix} 0 & Z & -Y & | \\ -Z & 0 & X & | \\ Y & -X & 0 & | \\ - & - & - & + \end{vmatrix}
\end{array}\right|. \tag{2.5.23}$$

Die Diagonalelemente ergeben Null, und jede weiteres algebraisches Komplement hat sieben Elemente mit der allgemeinen Form

$$\alpha\left(xX + yY + zZ\right) = \alpha\mathbf{x}^T\mathbf{X}, \qquad \alpha = x, y, z, X, Y, Z \tag{2.5.24}$$

und $\mathbf{x}^T\mathbf{X}$ kann ausgeklammert werden

$$K = \begin{pmatrix} 0 & z\mathbf{x}^T\mathbf{X} & -y\mathbf{x}^T\mathbf{X} & -X\mathbf{x}^T\mathbf{X} \\ -z\mathbf{x}^T\mathbf{X} & 0 & x\mathbf{x}^T\mathbf{X} & -Y\mathbf{x}^T\mathbf{X} \\ y\mathbf{x}^T\mathbf{X} & -x\mathbf{x}^T\mathbf{X} & 0 & -Z\mathbf{x}^T\mathbf{X} \\ X\mathbf{x}^T\mathbf{X} & Y\mathbf{x}^T\mathbf{X} & Z\mathbf{x}^T\mathbf{X} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y & -X \\ -z & 0 & x & -Y \\ y & -x & 0 & -Z \\ X & Y & Z & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^T\mathbf{X}. \tag{2.5.25}$$

Daraus folgt nun

$$M^{-1} = \frac{K^T}{|M|} = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{X}}{\left(\mathbf{x}^T\mathbf{X}\right)^2} = \frac{1}{\mathbf{x}^T\mathbf{X}} \begin{pmatrix} 0 & -z & y & X \\ z & 0 & -x & Y \\ -y & x & 0 & Z \\ -X & -Y & -Z & 0 \end{pmatrix} = \frac{N}{\mathbf{x}^T\mathbf{X}}, \tag{2.5.26}$$

$$N = \mathbf{x}^T\mathbf{X}M^{-1}, \qquad N^{-1} = \mathbf{x}^T\mathbf{X}M. \tag{2.5.27}$$

Die Rechnung definiert eine duale Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -z & y & X \\ z & 0 & -x & Y \\ -y & x & 0 & Z \\ -X & -Y & -Z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{im Vergleich zu} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & -x \\ -Z & 0 & X & -y \\ Y & -X & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5.28}$$

mit dem Produkt

$$NM = \mathbf{x}^T\mathbf{X}M^{-1}M = \mathbf{x}^T\mathbf{X}\mathbb{I} = \mathbf{x}^T\mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.5.29}$$

Im Sinne der Tensoralgebra sind M^{-1} ein kovarianter und M ein kontravarianter Tensor.

Die Sechservektoren bzw. dualen Matrizen haben Ähnlichkeit mit den Feldmatrizen nach MINKOWSKI [10]. Es sind dann Maßnahmen zu treffen, um das homogene und das inhomogene Gleichsystem so zu verändern, dass duale Matrizen entstehen.

Die Berechnung der Determinanten offenbart noch eine Besonderheit, wenn nicht die algebraischen Komplemente sondern nur die Matrix-Struktur genommen wird, nämlich

$$-\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Zy - Yz \\ Xz - Zx \\ Yx - Xz \end{pmatrix} = -\mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{X}), \tag{2.5.30}$$

$$-\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} zY - yZ \\ xZ - zX \\ yX - xY \end{pmatrix} = -\mathbf{X}\cdot(\mathbf{X}\times\mathbf{x}). \tag{2.5.31}$$

Da das Vektorprodukt orthogonal zu beiden Multiplikatoren ist, wird das daraus folgende skalare Produkt Null.

Die $4x4$-Matrizen werden zu Produkten von Dreier-Vektoren. Die sogenannte Zeitkomponente in der vierten Zeile und vierten Spalte verschwindet, weil sie als zusätzliche Scheindimension aus den homogenen Koordinaten entstanden ist. Das Universum bleibt ein vektorieller dreidimensionaler EUKLIDischer Raum, und die Zeit ein skalarer Parameter.

Es ist anzunehmen, dass MINKOWSKI und EINSTEIN diese Tatsachen kannten.

3 Die Maxwellschen Gleichungen

3.1 Die Gleichungsysteme

3.1.1 Zwei duale Systeme

Die MAXWELLschen Gleichungssysteme bestehen aus einem inhomogenen und einem homogenen System, die im Hinblick auf EINSTEINs ART [3] mit Frakturbuchstaben geschrieben werden sollen,

$$(\mathfrak{H})\quad \left\{\begin{array}{lllll} \mathrm{rot} & \mathfrak{h} & - & \dfrac{\partial\mathfrak{d}}{\partial t} & = \mathfrak{i} \\ \mathrm{div} & \mathfrak{d} & & & = \varrho \end{array}\right. \qquad (\mathfrak{E})\quad \left\{\begin{array}{llllll} & \mathrm{rot} & \mathfrak{e} & + & \dfrac{\partial\mathfrak{b}}{\partial t} & = 0 \\ - & \mathrm{div} & \mathfrak{b} & & & = 0 \end{array}\right. . \tag{3.1.1}$$

Durch einfache Umformung folgt

$$(\mathfrak{B})\quad \left\{\begin{array}{lllll} \mathrm{rot} & \dfrac{\mathfrak{b}}{\mu} & - & \dfrac{\partial\varepsilon\mathfrak{e}}{\partial t} & = \mathfrak{i} \\ \mathrm{div} & \varepsilon\mathfrak{e} & & & = \varrho \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{lllll} \mathrm{rot} & \mathfrak{b} & -\mu\varepsilon & \dfrac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t} & = \mu\mathfrak{i} = \dfrac{c\mu\mathfrak{i}}{c} \\ \mathrm{div} & \varepsilon\mathfrak{e} & & & = \varrho = \end{array}\right. \tag{3.1.2}$$

$$(\mathfrak{B})\quad \left\{\begin{array}{lllll} \mathrm{rot} & c\mathfrak{b} & - & \dfrac{\partial\mathfrak{e}}{c\partial t} & = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\mathfrak{i} \\ \mathrm{div} & \mathfrak{e} & & & = \dfrac{\varrho}{\varepsilon} \end{array}\right. . \tag{3.1.3}$$

Ebenso wandeln wir $(\mathfrak{E})$ um

$$(\mathfrak{E})\quad \left\{\begin{array}{llllll} & \mathrm{rot} & \mathfrak{e} & + & \dfrac{\partial\mathfrak{b}}{\partial t} & = 0 \\ - & \mathrm{div} & \mathfrak{b} & & & = 0 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{llllll} & \mathrm{rot} & \dfrac{\mathfrak{d}}{\varepsilon} & + & \dfrac{\partial\mu\mathfrak{h}}{\partial t} & = 0 \\ - & \mathrm{div} & \mu\mathfrak{h} & & & = 0 \end{array}\right. , \tag{3.1.4}$$

$$(\mathfrak{D})\quad \left\{\begin{array}{lllll} & \mathrm{rot} & c\mathfrak{d} & +c\varepsilon\mu & \dfrac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t} \\ - & \mathrm{div} & \mu\mathfrak{h} & & \end{array}\right. \begin{array}{l} = \\ = - \end{array} \begin{array}{lllll} \mathrm{rot} & c\mathfrak{d} & + & \dfrac{c}{c^2}\dfrac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t} & = 0 \\ \mathrm{div} & \mu\mathfrak{h} & & & = 0 \end{array} , \tag{3.1.5}$$

$$(\mathfrak{D})\quad \left\{\begin{array}{llllll} & \mathrm{rot} & c\mathfrak{d} & + & \dfrac{\partial\mathfrak{h}}{c\partial t} & = 0 \\ - & \mathrm{div} & \mathfrak{h} & & & = 0 \end{array}\right. . \tag{3.1.6}$$

Dadurch gibt es zwei äquivalente Paare mit den elektromagnetischen Größenpaaren $\mathfrak{h}$, $c\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$, $c\mathfrak{b}$

$$(\mathfrak{H}) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \ \mathfrak{h} - \dfrac{\partial c\mathfrak{d}}{\partial ct} = \mathfrak{i} \\ \operatorname{div} \ c\mathfrak{d} = c\varrho \end{cases}, \qquad (\mathfrak{D}) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \ c\mathfrak{d} + \dfrac{\partial \mathfrak{h}}{c\partial t} = 0 \\ -\operatorname{div} \ \mathfrak{h} = 0 \end{cases}, \tag{3.1.7}$$

$$(\mathfrak{E}) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \ \mathfrak{e} + \dfrac{\partial c\mathfrak{b}}{\partial ct} = 0 \\ -\operatorname{div} \ c\mathfrak{b} = 0 \end{cases}, \qquad (\mathfrak{B}) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \ c\mathfrak{b} - \dfrac{\partial \mathfrak{e}}{c\partial t} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\mathfrak{i} \\ \operatorname{div} \ \mathfrak{e} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon} \end{cases}. \tag{3.1.8}$$

Hendrik Antoon Lorentz verwendete in [6] zwei elektromangetische Größenpaare

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \qquad \text{und} \qquad V\mathfrak{d}, \tag{3.1.9}$$

die dem Systemen ($\mathfrak{H}$) und ($\mathfrak{D}$) entsprechen.

3.1.2 Das Lorentzsche Gleichungssystem

Das inhomogene System ($\mathfrak{H}$) wird nach dem Vorbild von Einstein als kontravariante Transformation geschrieben. Da Ströme durch bewegte Ladungen entstehen, gilt $\mathfrak{i} = \varrho\mathfrak{v}$ als treibene physikalische Größe, und es entsteht daraus ein Vierer-Geschwindigkeitsvektor

$$(\mathfrak{H}) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \ \mathfrak{h} - \dfrac{\partial c\mathfrak{d}}{\partial ct} = \mathfrak{i} = \mathfrak{v}\varrho \\ \operatorname{div} \ c\mathfrak{d} = c\varrho = c\varrho \end{cases}, \tag{3.1.10}$$

$$(\mathfrak{H}) \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial z} - \dfrac{\partial c\mathfrak{d}_x}{c\partial t} \\ -\dfrac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial c\mathfrak{d}_y}{c\partial t} \\ \dfrac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial y} - \dfrac{\partial c\mathfrak{d}_z}{c\partial t} \\ \dfrac{\partial c\mathfrak{d}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial c\mathfrak{d}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial c\mathfrak{d}_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{i}_x \\ \mathfrak{i}_y \\ \mathfrak{i}_z \\ c\varrho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{v}_x \\ \mathfrak{v}_y \\ \mathfrak{v}_z \\ c \end{pmatrix} \varrho, \tag{3.1.11}$$

$$\left(\mathfrak{H}^{kon}\right) \qquad \left\{\mathcal{H}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{h}_z & -\mathfrak{h}_y & -c\mathfrak{d}_x \\ -\mathfrak{h}_z & 0 & \mathfrak{h}_x & -c\mathfrak{d}_y \\ \mathfrak{h}_y & -\mathfrak{h}_x & 0 & -c\mathfrak{d}_z \\ c\mathfrak{d}_x & c\mathfrak{d}_y & c\mathfrak{d}_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{i}_x \\ \mathfrak{i}_y \\ \mathfrak{i}_z \\ c\varrho \end{pmatrix}. \tag{3.1.12}$$

Nach dem Vorbild von Minkowski [10] und Einstein [3] entsteht eine indizierte Feldmatrix

$$\mathcal{H} = H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{h}_z & -\mathfrak{h}_y & -c\mathfrak{d}_x \\ -\mathfrak{h}_z & 0 & \mathfrak{h}_x & -c\mathfrak{d}_y \\ \mathfrak{h}_y & -\mathfrak{h}_x & 0 & -c\mathfrak{d}_z \\ c\mathfrak{d}_x & c\mathfrak{d}_y & c\mathfrak{d}_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H^{xy} & H^{xz} & H^{xt} \\ H^{yx} & 0 & H^{yz} & H^{yt} \\ H^{zx} & H^{zy} & 0 & H^{zt} \\ H^{tx} & H^{ty} & H^{tz} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.13}$$

Das homogene System ($\mathfrak{D}$) wird kovariant differenziert

$$(\mathfrak{D}) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \ c\mathfrak{d} + \dfrac{\partial \mathfrak{h}}{c\partial t} = 0 \\ -\operatorname{div} \ \mathfrak{h} = 0 \end{cases}, \tag{3.1.14}$$

$$(\mathfrak{D})\qquad \begin{pmatrix} & \dfrac{\partial c\mathfrak{d}_z}{\partial y} & -\dfrac{\partial c\mathfrak{d}_y}{\partial z} & +\dfrac{\partial \mathfrak{h}_x}{c\partial t} \\ -\dfrac{\partial c\mathfrak{d}_z}{\partial x} & & +\dfrac{\partial c\mathfrak{d}_x}{\partial z} & +\dfrac{\partial \mathfrak{h}_y}{c\partial t} \\ \dfrac{\partial c\mathfrak{d}_y}{\partial x} & -\dfrac{\partial c\mathfrak{d}_x}{\partial y} & & +\dfrac{\partial \mathfrak{h}_z}{c\partial t} \\ -\dfrac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial x} & -\dfrac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial y} & -\dfrac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial z} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathfrak{D}_{kov})\qquad \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathcal{D}^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c\mathfrak{d}_z & c\mathfrak{d}_y & -\mathfrak{h}_x \\ c\mathfrak{d}_z & 0 & -c\mathfrak{d}_x & -\mathfrak{h}_y \\ -c\mathfrak{d}_y & c\mathfrak{d}_x & 0 & -\mathfrak{h}_z \\ \mathfrak{h}_x & \mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1.15}$$

$$\mathcal{D}^T = D_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -c\mathfrak{d}_z & c\mathfrak{d}_y & -\mathfrak{h}_x \\ c\mathfrak{d}_z & 0 & -c\mathfrak{d}_x & -\mathfrak{h}_y \\ -c\mathfrak{d}_y & c\mathfrak{d}_x & 0 & -\mathfrak{h}_z \\ \mathfrak{h}_x & \mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H^{zt} & H^{ty} & H^{yx} \\ H^{tz} & 0 & H^{xt} & H^{xz} \\ H^{yt} & H^{tx} & 0 & H^{yx} \\ H^{yz} & H^{zx} & H^{xy} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.16}$$

Beide Feldmatrizen verfügen über dieselben sechs Komponenten mit unterschiedlicher Anordnung wie bei den dualen Matrizen.

3.1.3 Das alternative Gleichungssystem

Jetzt verwenden wir das zweite Gleichungssystem in analoger Weise.

Das inhomogene System $(\mathfrak{B})$ wird kontravariant differenziert (eigentlich werden die Operatoren transformiert)

$$(\mathfrak{B})\qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\ c\mathfrak{b} - \dfrac{\partial \mathfrak{e}}{c\partial t} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\mathfrak{i} = \dfrac{\mathfrak{i}}{c\varepsilon} \\ \operatorname{div}\ \mathfrak{e} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon} \end{cases} \tag{3.1.17}$$

$$(\mathfrak{B})\qquad \begin{pmatrix} & \dfrac{\partial c\mathfrak{b}_z}{\partial y} & -\dfrac{\partial c\mathfrak{b}_y}{\partial z} & -\dfrac{\partial \mathfrak{e}_x}{c\partial t} \\ -\dfrac{\partial c\mathfrak{b}_z}{\partial x} & & +\dfrac{\partial c\mathfrak{b}_x}{\partial z} & -\dfrac{\partial \mathfrak{e}_y}{c\partial t} \\ \dfrac{\partial c\mathfrak{b}_y}{\partial x} & -\dfrac{\partial c\mathfrak{b}_x}{\partial y} & & -\dfrac{\partial \mathfrak{e}_z}{c\partial t} \\ \dfrac{\partial \mathfrak{e}_x}{\partial x} & +\dfrac{\partial \mathfrak{e}_y}{\partial y} & +\dfrac{\partial \mathfrak{e}_z}{\partial z} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathfrak{i}_x}{c\varepsilon} \\ \dfrac{\mathfrak{i}_y}{c\varepsilon} \\ \dfrac{\mathfrak{i}_z}{c\varepsilon} \\ \dfrac{\varrho}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{3.1.18}$$

$$\left(\mathfrak{B}^{kon}\right)\qquad \left\{\mathcal{B}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\} = \begin{pmatrix} 0 & c\mathfrak{b}_z & -c\mathfrak{b}_y & -\mathfrak{e}_x \\ -c\mathfrak{b}_z & 0 & c\mathfrak{b}_x & -\mathfrak{e}_y \\ c\mathfrak{b}_y & -c\mathfrak{b}_x & 0 & -\mathfrak{e}_z \\ \mathfrak{e}_x & \mathfrak{e}_y & \mathfrak{e}_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathfrak{i}_x}{c\varepsilon} \\ \dfrac{\mathfrak{i}_y}{c\varepsilon} \\ \dfrac{\mathfrak{i}_z}{c\varepsilon} \\ \dfrac{\varrho}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{3.1.19}$$

$$\mathcal{B} = B^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & c\mathfrak{b}_z & -c\mathfrak{b}_y & -\mathfrak{e}_x \\ -c\mathfrak{b}_z & 0 & c\mathfrak{b}_x & -\mathfrak{e}_y \\ c\mathfrak{b}_y & -c\mathfrak{b}_x & 0 & -\mathfrak{e}_z \\ \mathfrak{e}_x & \mathfrak{e}_y & \mathfrak{e}_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B^{xy} & B^{xz} & B^{xt} \\ B^{yx} & 0 & B^{yz} & B^{yt} \\ B^{zx} & B^{zy} & 0 & B^{zt} \\ B^{tx} & B^{ty} & B^{tz} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.20}$$

Das homogene System $(\mathfrak{D})$ wird kovariant differnziert

$$(\mathfrak{E}) \quad \left\{ \begin{array}{rlcl} & \text{rot} \; \mathfrak{e} & + \dfrac{\partial c\mathfrak{b}}{\partial ct} & = 0 \\ - & \text{div} \; c\mathfrak{b} & & = 0 \end{array} \right. , \tag{3.1.21}$$

$$(\mathfrak{E}) \quad \begin{pmatrix} & \dfrac{\partial \mathfrak{e}_z}{\partial y} & - \dfrac{\partial \mathfrak{e}_y}{\partial z} & + \dfrac{\partial c\mathfrak{b}_x}{c\partial t} \\ - \dfrac{\partial \mathfrak{e}_z}{\partial x} & & + \dfrac{\partial \mathfrak{e}_x}{\partial z} & + \dfrac{\partial c\mathfrak{b}_y}{c\partial t} \\ \dfrac{\partial \mathfrak{e}_y}{\partial x} & - \dfrac{\partial \mathfrak{e}_x}{\partial y} & & + \dfrac{\partial c\mathfrak{b}_z}{c\partial t} \\ - \dfrac{\partial c\mathfrak{b}_x}{\partial x} & - \dfrac{\partial c\mathfrak{b}_y}{\partial y} & - \dfrac{\partial c\mathfrak{b}_z}{\partial z} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{3.1.22}$$

$$(\mathfrak{E}_{kov}) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathcal{E}^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{e}_z & \mathfrak{e}_y & -c\mathfrak{b}_x \\ \mathfrak{e}_z & 0 & -\mathfrak{e}_x & -c\mathfrak{b}_y \\ -\mathfrak{e}_y & \mathfrak{e}_x & 0 & -c\mathfrak{b}_z \\ c\mathfrak{b}_x & c\mathfrak{b}_y & c\mathfrak{b}_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{3.1.23}$$

$$\mathcal{E}^T = E_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{e}_z & \mathfrak{e}_y & -c\mathfrak{b}_x \\ \mathfrak{e}_z & 0 & -\mathfrak{e}_x & -c\mathfrak{b}_y \\ -\mathfrak{e}_y & \mathfrak{e}_x & 0 & -c\mathfrak{b}_z \\ c\mathfrak{b}_x & c\mathfrak{b}_y & c\mathfrak{b}_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B^{zt} & B^{ty} & B^{yx} \\ B^{tz} & 0 & B^{xt} & B^{xz} \\ B^{yt} & B^{tx} & 0 & B^{yx} \\ B^{yz} & B^{zx} & B^{xy} & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.1.24}$$

3.2 Struktur der Feldmatrizen

Die typischen Strukturen der vier Feldmatrizen ergeben sich aus dem Vergleich

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{h}_z & -\mathfrak{h}_y & -c\mathfrak{d}_x \\ -\mathfrak{h}_z & 0 & \mathfrak{h}_x & -c\mathfrak{d}_y \\ \mathfrak{h}_y & -\mathfrak{h}_x & 0 & -c\mathfrak{d}_z \\ c\mathfrak{d}_x & c\mathfrak{d}_y & c\mathfrak{d}_z & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{D}^T = \begin{pmatrix} 0 & -c\mathfrak{d}_z & c\mathfrak{d}_y & -\mathfrak{h}_x \\ c\mathfrak{d}_z & 0 & -c\mathfrak{d}_x & -\mathfrak{h}_y \\ -c\mathfrak{d}_y & c\mathfrak{d}_x & 0 & -\mathfrak{h}_z \\ \mathfrak{h}_x & \mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_z & 0 \end{pmatrix} , \tag{3.2.1}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & c\mathfrak{b}_z & -c\mathfrak{b}_y & -\mathfrak{e}_x \\ -c\mathfrak{b}_z & 0 & c\mathfrak{b}_x & -\mathfrak{e}_y \\ c\mathfrak{b}_y & -c\mathfrak{b}_x & 0 & -\mathfrak{e}_z \\ \mathfrak{e}_x & \mathfrak{e}_y & \mathfrak{e}_z & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{E}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{e}_z & \mathfrak{e}_y & -c\mathfrak{b}_x \\ \mathfrak{e}_z & 0 & -\mathfrak{e}_x & -c\mathfrak{b}_y \\ -\mathfrak{e}_y & \mathfrak{e}_x & 0 & -c\mathfrak{b}_z \\ c\mathfrak{b}_x & c\mathfrak{b}_y & c\mathfrak{b}_z & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.2.2}$$

Sie enthalten einen Dreiervektor der räumlichen elektrischen und einen Dreiervektor der magnetischen Feldkomponenten, aber keine Zeitkomponente. Diese tritt erst durch die Differentiation mit dem raumzeitlichen Vierer-Differential-Operator in Erscheinung. Wir wählen zwei duale Matrizen M und N^T

$$M = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & -x \\ -Z & 0 & X & -y \\ Y & -X & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix} , \quad N = \begin{pmatrix} 0 & z & -y & -X \\ -z & 0 & x & -Y \\ y & -x & 0 & -Z \\ X & Y & Z & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.3}$$

mit dem Produkt

$$N^T M = \begin{pmatrix} 0 & -z & y & X \\ z & 0 & -x & Y \\ -y & x & 0 & Z \\ -X & -Y & -Z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & -x \\ -Z & 0 & X & -y \\ Y & -X & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix} , \tag{3.2.4}$$

$$N^T M = \begin{pmatrix} xX + yY + zZ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & xX + yY + zZ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & xX + yY + zZ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & xX + yY + zZ \end{pmatrix} , \tag{3.2.5}$$

$$N^T M = M N^T = M^T N = N M^T = \mathbf{x}^T \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.6}$$

Darin ist

$$\mathbf{x}^T \mathbf{X} = \mathbf{x}^T \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.2.7}$$

Das Produkt der beiden Matrizen enthält das skalare Produkt der beiden am Sechservektor beteiligten Dreiervektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{X}$ sowie die $4x4$-Einheitsmatrix $\mathbb{I}$. Wenn beide Vektoren orthogonal zueonander sind, verschwindet das Produkt, und die Gleichungen sind eigentlich nicht invertierbar, weil deren Determinante verschwindet. Da wir aber ohne determinanten auskommen, kann an dennoch von Inversion sprechen.

Die Struktur der Matrizen $M, \mathcal{H}, \mathcal{B}$ ist gleich, während die Strukturen von $\mathcal{D}^T, \mathcal{E}^T$ von N und N^T abweichen. Zum Erreichen von äquivalenten Ergebnissen müssen die elektromagnetischen Gleichungspaare dahingehend angepasst werden, wozu eine der beteiligten Matrizen beidseitig mit dem symmetrischen Fundamentaltensor zu multiplizieren ist, z.B.

$$\mathcal{D}^T \longrightarrow G^T \mathcal{D}^T G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c\mathfrak{d}_z & c\mathfrak{d}_y & -\mathfrak{h}_x \\ c\mathfrak{d}_z & 0 & -c\mathfrak{d}_x & -\mathfrak{h}_y \\ -c\mathfrak{d}_y & c\mathfrak{d}_x & 0 & -\mathfrak{h}_z \\ \mathfrak{h}_x & \mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.2.8}$$

$$G^T \mathcal{D}^T G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c\mathfrak{d}_z & c\mathfrak{d}_y & \mathfrak{h}_x \\ c\mathfrak{d}_z & 0 & -c\mathfrak{d}_x & \mathfrak{h}_y \\ -c\mathfrak{d}_y & c\mathfrak{d}_x & 0 & \mathfrak{h}_z \\ \mathfrak{h}_x & \mathfrak{h}_y & \mathfrak{h}_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c\mathfrak{d}_z & c\mathfrak{d}_y & \mathfrak{h}_x \\ c\mathfrak{d}_z & 0 & -c\mathfrak{d}_x & \mathfrak{h}_y \\ -c\mathfrak{d}_y & c\mathfrak{d}_x & 0 & \mathfrak{h}_z \\ -\mathfrak{h}_x & -\mathfrak{h}_y & -\mathfrak{h}_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.9}$$

Bei den beiden Multiplikationen vertauschen

- G (rechts) die Vorzeichen der rechten Spalte,
- G^T (links) die Vorzeichen der unteren Zeile.

Ich bezeichne die rechte Seite der Multiplukation als kontravariant und die linke als kovariant. Man kann auf einem ähnlichen Wege auch einen Fundamentaltensor

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2.10}$$

verwenden, wobei $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ nicht transponiert werden.

Neben der Multiplikation der beiden dualen Matrizen miteinander interessieren auch die Quadrate

$$M^2 \equiv M^T M = \begin{pmatrix} 0 & -Z & Y & x \\ Z & 0 & -X & y \\ -Y & X & 0 & z \\ -x & -y & -z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & -x \\ -Z & 0 & X & -y \\ Y & -X & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.11}$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} x^2 + Y^2 + Z^2 & xy - XY & xz - XZ & yZ - zY \\ xy - XY & y^2 + X^2 + Z^2 & yz - YZ & zX - xZ \\ xz - XZ & yz - YZ & z^2 + X^2 + Y^2 & xY - yX \\ yZ - zY & zX - xZ & xY - yX & x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}, \tag{3.2.12}$$

worin die rechte Spalte und die untere Zeile die Komponenten eine Vektorproduktes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \tag{3.2.13}$$

enthalten. Das Element $4,4$ ist ein skalares Produkt. Die Diagonalen lassen sich umformen, und es entsteht die neue Gestalt

$$\begin{pmatrix} x^2 - X^2 + \mathbf{X}^T\mathbf{X} & xy - XY & xz - XZ & yZ - zY \\ yx - YX & y^2 - Y^2 + \mathbf{X}^T\mathbf{X} & yz - YZ & zX - xZ \\ zx - ZX & zy - ZY & z^2 - Z^2 + \mathbf{X}^T\mathbf{X} & xY - yX \\ yZ - zY & zX - xZ & xY - yX & x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}. \tag{3.2.14}$$

Nähere Untersuchungen wurden noch nicht angestellt, wobei die beiden skalaren Produkte ein Maß für die elektrische und die magnetische Energie sind. Die Elemente außerhalb der Diagonale sind Komponenten von Vektorprodukten. Sie deuten auf Strahlungsleistungen und MAXWELLsche Spannungen hin.

3.3 Die Potentiale

3.3.1 Potentiale im inhomgenen Feld

Bereits MAXWELL [7, 8, 9] führte neben der elektrischen Verschiebung das Vektorpotential ein

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & \mathbf{i}\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y} & - & \mathbf{i}\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z} & - \\ - & \mathbf{j}\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x} & & & + & \mathbf{j}\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z} & + \\ + & \mathbf{k}\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x} & - & \mathbf{k}\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y} & & & \end{array} \right\} \tag{3.3.1}$$

ein. Diese Komponenten tragen wir in die Matrix $\mathcal{B}$ ein

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & c\mathfrak{b}_z & -c\mathfrak{b}_y & -\mathfrak{e}_x \\ -c\mathfrak{b}_z & 0 & c\mathfrak{b}_x & -\mathfrak{e}_y \\ c\mathfrak{b}_y & -c\mathfrak{b}_x & 0 & -\mathfrak{e}_z \\ \mathfrak{e}_x & \mathfrak{e}_y & \mathfrak{e}_z & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{b}_z & -\mathfrak{b}_y & -\dfrac{\mathfrak{e}_x}{c} \\ -\mathfrak{b}_z & 0 & \mathfrak{b}_x & -\dfrac{\mathfrak{e}_y}{c} \\ \mathfrak{b}_y & -\mathfrak{b}_x & 0 & -\dfrac{\mathfrak{e}_z}{c} \\ \dfrac{\mathfrak{e}_x}{c} & \dfrac{\mathfrak{e}_y}{c} & \dfrac{\mathfrak{e}_z}{c} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.2}$$

$$\frac{\mathcal{B}}{c} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z}\right) & -\dfrac{\mathfrak{e}_x}{c} \\ \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x}\right) & 0 & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) & -\dfrac{\mathfrak{e}_y}{c} \\ \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y}\right) & 0 & -\dfrac{\mathfrak{e}_z}{c} \\ \dfrac{\mathfrak{e}_x}{c} & \dfrac{\mathfrak{e}_y}{c} & \dfrac{\mathfrak{e}_z}{c} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.3}$$

und ergänzen dieses Schema nach dem Vorbild EINSTEINs für die Hauptdiagonale und für die untere Zeile sowie die für rechte Spalte

$$\frac{\mathcal{B}^{\mu\nu}}{c} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial x} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial x} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{c\partial t}\right) \\ \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial y}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{c\partial t}\right) \\ \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{c\partial t}\right) \\ \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{c\partial t} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{c\partial t} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial y}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{c\partial t} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_t}{c\partial t} - \dfrac{\partial\mathfrak{a}_t}{c\partial t}\right) \end{pmatrix}. \tag{3.3.4}$$

Die Hauptdiagonale bleibt dabei Null

$$\frac{\mathcal{B}^{\mu\nu}}{c}=\begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{c\partial t}\right)\\ \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x}\right) & 0 & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{c\partial t}\right)\\ \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{c\partial t}\right)\\ \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{c\partial t}-\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{c\partial t}-\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{c\partial t}-\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.5}$$

Durch Verwendung der Vorzeichen in $\mathcal{B}$ und von Blockmatrizen ist $\frac{\mathcal{B}^{\mu\nu}}{c}$

$$\frac{\mathcal{B}^{\mu\nu}}{c}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z}\right)\\ -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z}\right)\\ \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) & -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{c\partial t}-\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial x}\right)\\ -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{c\partial t}-\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial y}\right)\\ -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{c\partial t}-\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial z}\right) \end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{c\partial t}-\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{c\partial t}-\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{c\partial t}-\frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial z}\right) \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.6}$$

$$\frac{\mathcal{B}^{\mu\nu}}{c}=\begin{pmatrix} \text{rot }\mathfrak{A} & -\mathfrak{E}\\ \mathfrak{E} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \text{rot }\mathfrak{A} & -\frac{\partial\mathfrak{A}}{c\partial t}+\text{grad }\mathfrak{a}_t\\ \frac{\partial\mathfrak{A}}{c\partial t}-\text{grad }\mathfrak{a}_t & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.7}$$

Hierfür gibt Maxwell [9] [599.] an

$$\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_1+\mathfrak{E}_2+\mathfrak{E}_3=V.\mathfrak{G}\mathfrak{B}-\dot{\mathfrak{A}}-\nabla\Psi \tag{3.3.8}$$

und Schmutzer [11]

$$\mathbf{E}=-\text{grad }\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \tag{3.3.9}$$

Im Vergleich ist

$$-\mathfrak{a}_t=\Psi=c\varphi \tag{3.3.10}$$

das elektrische Potential, und

$$\frac{\mathcal{B}^{\mu\nu}}{c}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z}\right)\\ -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z}\right)\\ \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) & -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{c\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\\ -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{c\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\\ -\left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{c\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_x}{c\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_y}{c\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial\mathfrak{a}_z}{c\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.11}$$

$\frac{\mathcal{B}^{\mu\nu}}{c}$ zerfällt in zwei Matrizen

$$\frac{\mathcal{B}^{\mu\nu}}{c}=\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial x} & \frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x} & \frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x} & \frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial x}\\ \frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y} & \frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial y} & \frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y} & \frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial y}\\ \frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z} & \frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z} & \frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial z} & \frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial z}\\ \frac{\partial\mathfrak{a}_x}{c\partial t} & \frac{\partial\mathfrak{a}_y}{c\partial t} & \frac{\partial\mathfrak{a}_z}{c\partial z} & \frac{\partial\mathfrak{a}_t}{c\partial t} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial x} & \frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y} & \frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z} & \frac{\partial\mathfrak{a}_x}{c\partial t}\\ \frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x} & \frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial y} & \frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z} & \frac{\partial\mathfrak{a}_y}{c\partial t}\\ \frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x} & \frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y} & \frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial z} & \frac{\partial\mathfrak{a}_z}{c\partial t}\\ \frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial x} & \frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial y} & \frac{\partial\mathfrak{a}_t}{\partial z} & \frac{\partial\mathfrak{a}_t}{c\partial t} \end{pmatrix}=\Psi-\Psi^T. \tag{3.3.12}$$

3.3.2 Potentiale im homogenen Feld

Einstein [3] entwickelte die Potentiale aus dem kovarianten Sechservektor der inhomogen Gleichungen

$$(\mathfrak{E}) \qquad \left\{ \begin{array}{rlllll} & \text{rot} & \mathfrak{e} & + & \dfrac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} & = 0 \\ - & \text{div} & \mathfrak{b} & & & = 0 \end{array} \right. \tag{3.3.13}$$

über

$$F_{\varrho\sigma} = \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\varrho}. \tag{3.3.14}$$

Dazu bietet sich das unveränderte Gleichungssystem an

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{e}_z & \mathfrak{e}_y & -\mathfrak{b}_x \\ \mathfrak{e}_z & 0 & -\mathfrak{e}_x & -\mathfrak{b}_y \\ -\mathfrak{e}_y & \mathfrak{e}_x & 0 & -\mathfrak{b}_z \\ \mathfrak{b}_x & \mathfrak{b}_y & \mathfrak{b}_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.15}$$

Mit

$$\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \end{vmatrix} \tag{3.3.16}$$

und den Werten von Maxwell und Schmutzer

$$\mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3 = -\dot{\mathfrak{A}} - \nabla \Psi \tag{3.3.17}$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{3.3.18}$$

ist die Feldmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial t}\right) & -\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial t}\right) & -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) \\ -\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial t}\right) & 0 & \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial t}\right) & -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial t}\right) & -\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial t}\right) & 0 & -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.19}$$

Diese Gleichung kann nur links oben die Rotation andeuten, wenn $\varphi = -\psi$ gesetzt wird

$$\begin{pmatrix} 0 & \left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial t} - \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\right) & -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial t} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) & -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) \\ -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial t} - \dfrac{\partial \psi}{\partial z}\right) & 0 & \left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial t} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) & -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial t} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) & -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial t} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) & 0 & -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.20}$$

Sie sieht nicht gerade freundlich aus. Die kovariante Differention liefert die vier Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
 & & -\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)}{\partial y} & + & \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)}{\partial z} & + & \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y}-\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z}\right)}{\partial t} & = 0 \\
\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)}{\partial x} & & & - & \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{\partial z} & + & \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x}-\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y}\right)}{\partial t} & = 0 \\
-\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)}{\partial x} & + & \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{\partial y} & & & & \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x}-\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y}\right)}{\partial t} & = 0 \\
-\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial y}-\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial z}\right)}{\partial x} & - & \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial z}-\dfrac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial x}\right)}{\partial y} & - & \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial x}-\dfrac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial y}\right)}{\partial z} & & & = 0,
\end{array} \tag{3.3.21}$$

aber die letzte Gleichung bestätigt die Summe

$$-\text{div rot }\mathfrak{A} = 0 \tag{3.3.22}$$

Null für ein Rotationsfeld, und die Ableitungen der ψ verschwinden auch, ebenso die dann verbleibenden Ableitungen der Komponenten von $\mathfrak{A}$.

Unter Berücksichtigung der dualen Feldmatrizen, die ineinander umgerechnet werden können, existiert nur das inhomogene Gleichungssystem von Maxwell real in der von Lorentz gegebenen Form.

References

[1] Bocher, M.: *Einführung in die höhere Algebra.* Teubner, 1910

[2] Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. In: *Annalen der Physik* 17 (1905), S. 891–921

[3] Einstein, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik* 49 (1916), S. 769–822

[4] Grossmann, M.: Mathematische Begriffsbildungen zur Gravitationstheorie. In: *Internet* (1913), S. 7

[5] Lorentz, H.A.: *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvmants.* E. J. BRILL, 1892

[6] Lorentz, H.A.: *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.* E. J. BRILL, 1895(2005)

[7] Maxwell, J. C.: *A treatise on electricity and magnetism.* Bd. I, II. Clarendon Press, 1873

[8] Maxwell, J. C.: *Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus I.* Bd. 1. Julius Springer, 1883

[9] Maxwell, J. C.: *Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus II.* Bd. 2. Julius Springer, 1883. – 624 S.

[10] Minkowski, Hermann: Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. In: *Nachr.d. Kgl.Ges. d. Wiss.* (1907), Dezember

[11] Schmutzer, Ernst: *Grundlagen der Theoretischen Physik.* Bd. I u. II. WILEY-VCH, 2005

[12] Smirnow, W.I.: *Lehrbuch der höheren Mathematik III/1.* Bd. III/1. 14. Auflage. Verlag Harry Deutsch, 1995