Der Ansatz der allgemeinen Relativitätstheorie

Wolfgang Lange

14. Oktober 2015

1 Einleitung

Die Mathematik am Ende des 19. Jahrhunderts enthält viele Überraschungen bereit, die zielgerichtet auf die allgemeine Relativitätstheorie von ALBERT EINSTEIN [4] führen. Die klaren Strukturen wurden von EINSTEIN so verschlüsselt, dass auch nach über 100 Jahren die Welt davon ergriffen ist. Viele Physiker geben zu, EINSTEINs Relativitätstheorie nicht begriffen zu haben. Bereits 1899 und 1910 erschienen zwei Lehrbücher von LUIGI BIANCHI *Über Differentialgeometrie* [1, 2], auf die EINSTEIN offensichtlich Bezug genommen hat.

Angeregt durch die offenen Fragen der speziellen Relativitätstheorie [3] habe ich mich mit der Analyse der allgemeinen Relativitätstheorie befasst und bin dabei zu einigen besonderen Erkenntnissen gekommen, die meine Auffassung von der Richtigkeit des NEWTONschen Theoriegebäudes bestätigen. Die Zitate wurden als Dateiausschnitte aus der Erstveröffentlichung aus den Annalen der Physik übernommen.

2 A. Prinzipielle Erwägungen

2.1 § 4. Beziehungen der vier Koordinaten zu räumlichen und zeitlichen Messergebnissen.

Analytischer Ausdruck für das Gravitatoonsfeld

Es kommt mir in dieser Abhandlung nicht darauf an, die allgemeine Relativitätstheorie als ein möglichst einfaches logisches System mit einem Minimum von Axiomen darzustellen. Sondern es ist mein Hauptziel, diese Theorie so zu entwickeln, daß der Leser die psychologische Natürlichkeit des eingeschlagenen Weges empfindet und daß die zugrunde gelegten Voraussetzungen durch die Erfahrung möglichst gesichert erscheinen. In diesem Sinne sei nun die Voraussetzung eingeführt:

Für unendlich kleine vierdimensionale Gebiete ist die Relativitätstheorie im engeren Sinne bei passender Koordinatenwahl zutreffend.

Der Beschleunigungszustand des unendlich kleinen („örtlichen“) Koordinatensystems ist hierbei so zu wählen, daß ein Gravitationsfeld nicht auftritt; dies ist für ein unendlich kleines Gebiet möglich. X_1, X_2, X_3 seien die räumlichen Koordinaten; X_4 die zugehörige, in geeignetem Maßstabe gemessene [1]) Zeitkoordinate. Diese Koordinaten haben, wenn ein starres Stäbchen als Einheitsmaßstab gegeben gedacht wird, bei gegebener Orientierung des Koordinatensystems eine unmittelbare physikalische Bedeutung im Sinne der speziellen Relativitätstheorie. Der Ausdruck

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \tag{1}$$

1) Die Zeiteinheit ist so zu wählen, daß die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit — in dem „lokalen“ Koordinatensystem gemessen — gleich 1 wird.

hat dann nach der speziellen Relativitätstheorie einen von der Orientierung des lokalen Koordinatensystems unabhängigen, durch Raum—Zeitmessung ermittelbaren Wert. Wir nennen ds die Größe des zu den unendlich benachbarten Punkten des vierdimensionalen Raumes gehörigen Linienelementes. Ist das zu dem Element $(dX_1 \ldots dX_4)$ gehörige ds^2 positiv, so nennen wir mit Minkowski ersteres zeitartig, im entgegengesetzten Falle raumartig.

Gravitation hat zunächst nichts mit Lichtgeschwindigkeit zu tun. Jede Fläche zweiten Grades im dreidimensionalen Euklidischen Raum wird durch 10 Parameter und die vier Koordinaten x, y, z, α [1] § 12 oder durch die homogenen Koordinaten $\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha}, 1$ bestimmt. Im Falle der Kugel ist $\alpha = r = ct$, aber $r = ct$ gilt nur für die Ausbreitung eines Lichtimpulses in dem mit der Lichtquelle verbunden Koordinatensystem. Jede Fläche zweiten Grades im dreidimensionalen Raum wird durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

bestimmt, und die Kugel mit dem Radius r durch

$$\begin{pmatrix} x & y & z & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ r \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Die Einsteinsche Lieblingsform

$$-x^2 - y^2 - z^2 + r^2 = 0$$

ist nur ein fauler Zauber.

Zu dem betrachteten „Linienelement" bzw. zu den beiden unendlich benachbarten Punktereignissen gehören auch bestimmte Differentiale $d x_1 \ldots . d x_4$ der vierdimensionalen Koordinaten des gewählten Bezugssystems. Ist dieses sowie ein „lokales" System obiger Art für die betrachtete Stelle gegeben, so werden sich hier die $d X_\nu$ durch bestimmte lineare homogene Ausdrücke der $d x_\sigma$ darstellen lassen:

$$d X_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma} d x_\sigma . \tag{2}$$

Das "Linienelement" zweier benachbarter Punktereignisse kann nur die Differenz von

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

und

$$(x + dx)^2 + (y + dy)^2 + (z + dz)^2 - (r + dr)^2 = 0$$

sein, und das ist

$$2xdx + dx^2 + 2ydy + dy^2 + 2zdz + dz^2 - 2rdr - dr^2 = 0,$$

also

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2 = -2xdx - 2ydy - 2zdz + 2rdr,$$

$$ds^2 = -\begin{pmatrix} dx & dy & dz & dr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2r \end{pmatrix}.$$

Der eigentliche Abstand ist

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 + dr^2 = 2rdr + dr^2 - 2xdx - 2ydy - 2zdz.$$

(2) kann man als Matrizengleichung schreiben, wobei der erste Index μ die Zeilennummer und der zweite Index σ die Spaltennummer in $\alpha_{\nu\sigma}$ angibt,

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \\ dX_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{pmatrix}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (1) ein, so erhält man

$$d s^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} d x_\sigma d x_\tau , \tag{3}$$

wobei die $g_{\sigma\tau}$ Funktionen der x_σ sein werden, die nicht mehr von der Orientierung und dem Bewegungszustand des „lokalen" Koordinatensystems abhängen können; denn $d s^2$ ist eine durch Maßstab-Uhrenmessung ermittelbare, zu den betrachteten, zeiträumlich unendlich benachbarten Punktereignissen gehörige, unabhängig von jeder besonderen Koordinatenwahl definierte Größe. Die $g_{\sigma\tau}$ sind hierbei so zu wählen, daß $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$ ist; die Summation ist über alle Werte von σ und τ zu erstrecken, so daß die Summe aus 4×4 Summanden besteht, von denen 12 paarweise gleich sind.

Nach den Regeln der Matrizenrechnung ist ds^2 eine quadratische Form

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{pmatrix},$$

$$ds^2 = \sum_{\tau=1}^{4} \left[dx_\tau \sum_{\sigma=1}^{4} g_{\sigma\tau} dx_\sigma \right].$$

Damit geht (1) über in

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dX_1 & dX_2 & dX_3 & dX_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \\ dX_4 \end{pmatrix},$$

und mit Substitution von (2)

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dX_1 & dX_2 & dX_3 & dX_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{pmatrix}.$$

Nun ist aber der Zeilenvektor der dX transponiert zu dem Spaltenvektor der dX, und man erhält durch weglassen der dx_τ und dx_σ für $g_{\sigma\tau}$

$$g_{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}.$$

Näheres zu diesen Transformationen findet man bei Bianchi [1]. Dieses zitierte deutsch geschriebene Lehrbuch von 1899 mit einer Neuauflage von 1910 dürfte die eigentliche Quelle von Einstein gewesen sein, denn es ist nicht überliefert, dass er italienisch sprach und die Werke von Ricci-Curbastro direkt gelesen hat.

Die Gleichung geht durch Transposition in sich selbst über, so dass $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$ ist. Speziell wird das Produkt

$$g_{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_{11} & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -\alpha_{33} & -\alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

worin jede Zeile mit jeder Spalte miteinander multipliziert werden, z.B.

$$g_{12} = g_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_{12} \\ -\alpha_{22} \\ -\alpha_{32} \\ \alpha_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_{11} \\ -\alpha_{21} \\ -\alpha_{31} \\ \alpha_{41} \end{pmatrix},$$

$$g_{12} = g_{21} = -\alpha_{11}\alpha_{12} - \alpha_{21}\alpha_{22} - \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{41}\alpha_{42}.$$

Der Fall der gewöhnlichen Relativitätstheorie geht aus dem hier Betrachteten hervor, falls es, vermöge des besonderen Verhaltens der $g_{\sigma\tau}$ in einem endlichen Gebiete, möglich ist, in diesem das Bezugssystem so zu wählen, daß die $g_{\sigma\tau}$ die konstanten Werte

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrr} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right.$$

annehmen. Wir werden später sehen, daß die Wahl solcher Koordinaten für endliche Gebiete im allgemeinen nicht möglich ist.

Das ist wegen der letzten Rechnung eine gewagte These, weil mit 16 Elementen in der Matrix $\|\alpha\|$ sehr viele Freiheitsgrade zur Verfügung stehen.

annehmen. Wir werden später sehen, daß die Wahl solcher Koordinaten für endliche Gebiete im allgemeinen nicht möglich ist.

Aus den Betrachtungen der §§ 2 und 3 geht hervor, daß die Größen $g_{\sigma\tau}$ vom physikalischen Standpunkte aus als diejenigen Größen anzusehen sind, welche das Gravitationsfeld in bezug auf das gewählte Bezugssystem beschreiben. Nehmen wir nämlich zunächst an, es sei für ein gewisses betrachtetes vierdimensionales Gebiet bei geeigneter Wahl der Koordinaten die spezielle Relativitätstheorie gültig. Die $g_{\sigma\tau}$ haben dann die in (4) angegebenen Werte. Ein freier materieller Punkt bewegt sich dann bezüglich dieses Systems geradlinig gleichförmig. Führt man nun durch eine beliebige Substitution neue Raum—Zeitkoordinaten $x_1 \ldots . x_4$ ein, so werden in diesem neuen System die $g_{\mu\nu}$ nicht mehr Konstante, sondern Raum—Zeitfunktionen sein. Gleichzeitig wird sich die Be-

Herr Einstein stellt richtig fest, dass durch eine Transformation mit der Matrix $\|\alpha\|$ aus dem geradlinigen kartesischen Koordinatensystem auch ein krummliniges entstehen kann, aber diese subjektive Betrachrungsweise ändert an geraden Lichtstrahlen überhaupt nichts, sie werden nur durch nichtlineare Gleichungen in diesen krummlinigen Koordinatensystemen beschrieben. Nehmen wir z.B. zwei große Punkt- oder kugelförmige Massen an, so wissen wir aus dem Analagon der Elektrostatik, dass es eine geradlinige Feldlinie zwischen den Mittelpunkten der beiden Massen und unendlich viele nichtlineare Feldlinien abweichend von der Verbindungslinie gibt. Eine sehr kleine Masse außerhalb der Verbindungslinie wird sich unter dem Einfluss der beiden großen Massen auf einer gekrümmten Bahn gemäß den Newtonschen Bewegungsgesetzen zu einer der beiden großen Massen bewegen. dazu braucht man keuine allgemeine Relativitätstheorie.

annehmen. Wir werden später sehen, daß die Wahl solcher Koordinaten für endliche Gebiete im allgemeinen nicht möglich ist.

Aus den Betrachtungen der §§ 2 und 3 geht hervor, daß die Größen $g_{\sigma\tau}$ vom physikalischen Standpunkte aus als diejenigen Größen anzusehen sind, welche das Gravitationsfeld in bezug auf das gewählte Bezugssystem beschreiben. Nehmen wir nämlich zunächst an, es sei für ein gewisses betrachtetes vierdimensionales Gebiet bei geeigneter Wahl der Koordinaten die spezielle Relativitätstheorie gültig. Die $g_{\sigma\tau}$ haben dann die in (4) angegebenen Werte. Ein freier materieller Punkt bewegt sich dann bezüglich dieses Systems geradlinig gleichförmig. Führt man nun durch eine beliebige Substitution neue Raum—Zeitkoordinaten $x_1 \ldots . x_4$ ein, so werden in diesem neuen System die $g_{\mu\nu}$ nicht mehr Konstante, sondern Raum—Zeitfunktionen sein. Gleichzeitig wird sich die Be-

Die Gravitation kann keine Ausnahme spielen, weil die Gravitationskräfte sich genauso wie die elektrostatischen Kräfte berechnen, mit der bekannten Ausnahme, dass sich in der Elektrodynamik ungleiche Ladungen und in der Gravitation gleichartige Massen sich gegenseitig anziehen. Abstoßungskräfte gibt es nach meinem Kenntnisstand in der Gravitation nicht. Potentialfelder eines Massehaufens und eine Ladungswolke haben ohne äußere Störungen dieselben Formen, was die Äquivalenz beider Phänomene hinsichtlich der Anziehung ausmacht.

3 Überlegungen zum Gravitationsfeld

Nebenstehende Abbildung 1 zeigt zwei Punkte einer Kugel in der Ebene $z = 0$. Es gibt drei ausgezeichnete Bewegungen

1. direkter Weg entlang der Strecke dS,
2. über den Bogen $\curvearrowleft PP' = Rd\varphi$ und den Vektor $\overrightarrow{P'Q} = dR$,
3. über den Vektor $\overrightarrow{PQ'} = dR$ und den Bogen $\curvearrowleft Q'Q = (R + dR)\, d\varphi$.

Die kürzeste Strecke, also die geodätische Linie ist nachweislich dS. Die beiden anderen Wege verlaufen über zwei Flächen zweiten Grades, nämlich über zwei unterschiedliche Kugeloberflächen und zwei unterschiedliche Kegel mit den entsprechenden Winkeln.

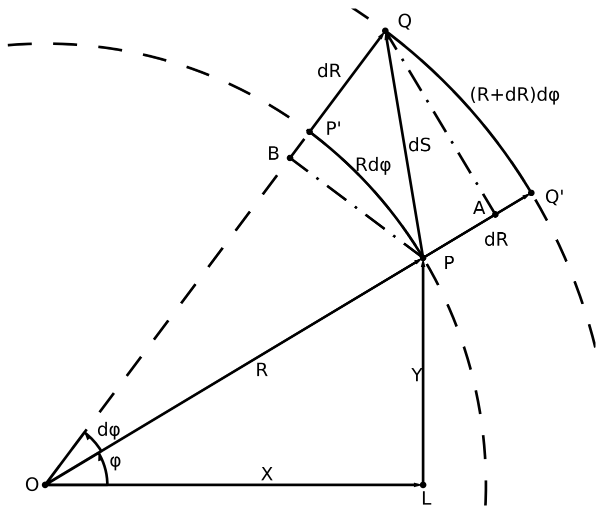

Abbildung 1: Zwei Punkte P und Q

Die Koordinaten der beiden Punkte sind

$$P = (X, Y, 0)\,, \qquad Q = (X + dX, Y + dY, 0)\,,$$

also sind die zugehörigen Kreisgleichungen auf dem Äquator $Z = 0$

$$X^2 + Y^2 = R^2,$$

$$(X + dX)^2 + (Y + dY)^2 = (R + dR)^2\,,$$

$$X^2 + 2XdX + dX^2 + Y^2 + 2YdY + dY^2 = R^2 + 2RdR + dR^2.$$

Wir bilden die Differenz der linken Seite

$$\overline{PQ}^2 = dS^2 = 2XdX + dX^2 + 2YdY + dY^2$$

und finden

$$dS = \sqrt{2XdX + dX^2 + 2YdY + dY^2}.$$

Nehmen wir dagegen die Differenz der rechten Seiten $2RdR + dR^2$, so gilt das für alle Punkte auf den beiden Kugeln mit den Radien R und $R + dR$, denn für $\overline{PQ'}$ und $\overline{P'Q}$ gilt ebenfalls die Differenz

$$2RdR + dR^2.$$

Es fehlen nämlich die Bogenlängen $\curvearrowleft PP' = Rd\varphi$ bzw. $\curvearrowleft Q'Q = (R + dR)\, d\varphi$. Da nützen selbst die schönen Worte von Einstein nichts. Der Abstand dS ist in Polarkoordinaten

$$dS^2 = (Rd\varphi)^2 + dR^2 \approx dR^2 + (R + dR)^2\, d\varphi^2.$$

Es gehen nur jeweils drei Werte dX, dY, dZ oder $R, dR, d\varphi$ in den Abstand ein. Natürlich wird der Begriff "Linienelement $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2$" nicht als Abstand definiert.

In der Abbildung 1 erkennt man auch, dass für die richtige Länge dS nur der Satz des Pythagoras über die Punkte A oder B und nicht über die Bögen gilt. Nur im unendlich Kleinen sind auch die Bögen relevant. Ansonsten sind höhere Ableitungen erforderlich.

Die Bewegungsgesetze hängen eng mit der Energie zusammen. Zwischen den beiden Kugeloberflächen herrscht ein konstantes von der Masse im Punkt O hervorgerufenes Potential, das für die radiale Gravitationsfeldstärke verantwortlich ist. Eine freie Masse wird sich ohne äußeren Zwang immer auf direktem Wege von Q nach P' bewegen. Nur wenn außerdem ein Drehimpuls wirkt, kann der Punkt P erreicht werden. Wir haben es also mit den beiden Kathegorien potentielle und kinetische Energie zu tun.

Literatur

[1] Bianchi, Luigi: *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* 1. Teubner, 1899. – 659 S.

[2] Bianchi, Luigi: *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* 2. Teubner, 1910. – 721 S.

[3] Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. In: *Annalen der Physik* 17 (1905), S. 891–921

[4] Einstein, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik* 49 (1916), S. 769–822