ART § 5.
Kontravarianter und kovarianter Vierervektor

Wolfgang Lange

14. Oktober 2015

1 B. Mathematische Hilfsmittel für die Aufstellung allgemein kovarianter Gleichungen

1.1 Über § 5. Kontravarianter und kovarianter Vierervektor

Wir beginnen mit den Bemerkungen am Schluss von EINSTEINs "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" § 5.

> **Bemerkung zur Vereinfachung der Schreibweise der Ausdrücke.**
>
> Ein Blick auf die Gleichungen dieses Paragraphen zeigt, daß über Indizes, die zweimal unter einem Summenzeichen auftreten [z. B. der Index ν in (5)], stets summiert wird, und zwar *nur* über zweimal auftretende Indizes. Es ist deshalb möglich, ohne die Klarheit zu beeinträchtigen, die Summenzeichen wegzulassen. Dafür führen wir die Vorschrift ein: Tritt ein Index in einem Term eines Ausdruckes zweimal auf, so ist über ihn stets zu summieren, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist.
>
> Der Unterschied zwischen dem kovarianten und kontravarianten Vierervektor liegt in dem Transformationsgesetz [(7) bzw. (5)]. Beide Gebilde sind Tensoren im Sinne der obigen allgemeinen Bemerkung; hierin liegt ihre Bedeutung. Im Anschluß an Ricci und Levi-Civita wird der kontravariante Charakter durch oberen, der kovariante durch unteren Index bezeichnet.

Diese Schreibweise der Indizes und die bekannte Matrizenrechnung wird bereits hier angewendet.

Kontravarianter Vierervektor. Das Linienelement ist definiert durch die vier „Komponenten" $d x_\nu$, deren Transformationsgesetz durch die Gleichung

$$d x_\sigma' = \sum_\nu \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\nu} d x_\nu \tag{5}$$

ausgedrückt wird. Die $d x_\sigma'$ drücken sich linear und homogen durch die $d x_\nu$ aus; wir können diese Koordinatendifferentiale $d x_\nu$ daher als die Komponenten eines „Tensors" ansehen, den wir speziell als kontravarianten Vierervektor bezeichnen. Jedes Ding, was bezüglich des Koordinatensystems durch vier Größen A^ν definiert ist, die sich nach demselben Gesetz

$$A^{\sigma'} = \sum_\nu \frac{\partial x_\sigma'}{\partial x_\nu} A^\nu \tag{5a}$$

transformieren, bezeichnen wir ebenfalls als kontravarianten Vierervektor. Aus (5a) folgt sogleich, daß die Summen $(A^\sigma \pm B^\sigma)$ ebenfalls Komponenten eines Vierervektors sind, wenn A^σ und B^σ es sind. Entsprechendes gilt für alle später als „Tensoren" einzuführenden Systeme (Regel von der Addition und Subtraktion der Tensoren).

Einstein verwendet den Begriff *Linienelement* unterschiedlich. Hier ist es ein vierdimensionaler Vektor, der nicht mit dem später verwendeten Linienelement ds übereinstimmt.
Gl. (5) ist ausgeführt für einen Wert σ

$$dx'^\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x_\nu} dx^\nu = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x_2} dx^2 + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x_3} dx^3 + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x_4} dx^4,$$

$$dx'^\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x_1} & \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x_2} & \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x_3} & \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ dx^4 \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial x'^\sigma}{\partial \mathbf{x}^T} d\mathbf{x}$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ dx^4 \end{pmatrix}.$$

Damit werden für jedes σ die vier Differentiale in der bekannten Matrixschreibweise als kontravarianter Vierervektor

$$\begin{pmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ dx'^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x_3} & \frac{\partial x'^1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x_3} & \frac{\partial x'^2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x_3} & \frac{\partial x'^3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial x'^4}{\partial x_1} & \frac{\partial x'^4}{\partial x_2} & \frac{\partial x'^4}{\partial x_3} & \frac{\partial x'^4}{\partial x_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ dx^4 \end{pmatrix} \equiv d\mathbf{x}' = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}^T} d\mathbf{x} = \Lambda d\mathbf{x},$$

$$\Lambda = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x_\nu}$$

oder als bekannte Matrix mit Zeilen- und Spaltenindex $\Lambda_{\mu\nu}$. Die Auflösung dieser Transformation erfolgt durch linksseitige Multiplikation

$$\Lambda^{-1} d\mathbf{x}' = \Lambda^{-1}\Lambda d\mathbf{x} = \mathbb{I} d\mathbf{x} = d\mathbf{x},$$

$$\begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ dx^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'_1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'_2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'_3} & \frac{\partial x^1}{\partial x'_4} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'_1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'_2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'_3} & \frac{\partial x^2}{\partial x'_4} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'_1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'_2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'_3} & \frac{\partial x'^3}{\partial x'_4} \\ \frac{\partial x^4}{\partial x'_1} & \frac{\partial x^4}{\partial x'_2} & \frac{\partial x^4}{\partial x'_3} & \frac{\partial x^4}{\partial x'_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \\ dx'^4 \end{pmatrix}.$$

Statt der beiden Spaltenvektoren der Differentiale kann man beliebige Größen verwenden und kommt auf ein Gleichungssystem bzw. die Tensorgleichung $(5a)$

$$A'^{\sigma} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x_{\nu}} A^{\nu} \equiv \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x_{\nu}} A^{\nu} \equiv \mathbf{a}' = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{a} = \Lambda\mathbf{a},$$

$$A^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A'^{\sigma} \equiv \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A'^{\sigma} \equiv \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'^T}\mathbf{a}' = \Lambda^{-1}\mathbf{a}'.$$

Die Spaltenvektoren des klassischen Gleichungssystems nennt EINSTEIN *kontravariante Vierervektoren* mit dem zugegörigen Transformationsgesetz.

Kovarianter Vierervektor. Vier Größen A_ν nennen wir die Komponenten eines kovarianten Vierervektors, wenn für jede beliebige Wahl des kontravarianten Vierervektors B^ν

(6) $$\sum_\nu A_\nu B^\nu = \text{Invariante.}$$

Aus dieser Definition folgt das Transformationsgesetz des kovarianten Vierervektors. Ersetzt man nämlich auf der rechten Seite der Gleichung

$$\sum_\sigma A'_\sigma B^{\sigma'} = \sum_\nu A_\nu B^\nu$$

B^ν durch den aus der Umkehrung der Gleichung (5a) folgenden Ausdruck

$$\sum_\sigma \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} B^{\sigma'},$$

so erhält man

$$\sum_\sigma B^{\sigma'} \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu = \sum_\sigma B^{\sigma'} A'_\sigma.$$

Hieraus folgt aber, weil in dieser Gleichung die $B^{\sigma'}$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, das Transformationsgesetz

(7) $$A'_\sigma = \sum \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu.$$

Dieser Abschnitt ist nur mit der Matrizenrechnung zu verstehen. Zwei Vektoren $\mathbf{a}'$ und $\mathbf{b}'$ sind so zu multiplizieren, dass das Ergebnis ein invarianter Skalar wird. Das geht nur mit der Transposition des einen Spaltenvektors in einen Zeilenvektor und wegen des kontravarianten Tensors $B'^{\sigma} \equiv \mathbf{b}' = \Lambda \mathbf{b}$ lautet die Beziehung

$$\mathbf{a}'^T \mathbf{b}' = \mathbf{a}^T \Lambda^{-1} \Lambda \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbb{I} \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}.$$

Der kontravariante Vektor wird

$$B'^{\sigma} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x_{\nu}} B^{\nu}$$

und der *kovarianten* Vierervektor mit unterem Index

$$A'_{\sigma} = \mathbf{a}'^T = \mathbf{a}^T \Lambda^{-1} = \sum_{\nu=1}^{4} A_{\nu} \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}, \qquad \text{und} \qquad \mathbf{a}' = \left(\Lambda^{-1}\right)^T \mathbf{a}.$$

Das Produkt ist

$$A'_{\sigma} B'^{\sigma} = \left(A_{\nu} \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right) \left(\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x_{\nu}} B^{\nu} \right) = A_{\nu} \left(\frac{\partial x_{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x_{\nu}} \right) B^{\nu}.$$

Das führt uns zu dem Satz:

> "*Das skalare Produkt zweier Vektoren (eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor) ist invariant gegenüber linearen Transformationen, wenn der Spaltenvektor mit einer Transformationsmatrix Λ linksseitig (kontravariante Transformation) und der Zeilenvektor rechtsseitig mit der Inversen Λ^{-1} der verwendeten Transformationsmatrix (kovariante Transformation) multipliziert werden.* Beide Vektoren werden kontragredient zueinander transformiert."

Das zugehörige Differential ist

$$dx'_{\sigma} = dx_1 \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial x'^1} + dx_2 \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial x'^2} + dx_3 \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial x'^3} + dx_4 \frac{\partial x_{\sigma}}{\partial x'^4},$$

$$dx'_{\sigma} = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x'^4} \end{pmatrix}.$$

Alle vier gestrichenen Differentiale sind

$$\begin{pmatrix} dx'_1 & dx'_2 & dx'_3 & dx'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x_2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x_3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x_4}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x_2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x_3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x_4}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x'^3} & \frac{\partial x_2}{\partial x'^3} & \frac{\partial x_3}{\partial x'^3} & \frac{\partial x_4}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x'^4} & \frac{\partial x_2}{\partial x'^4} & \frac{\partial x_3}{\partial x'^4} & \frac{\partial x_4}{\partial x'^4} \end{pmatrix}.$$

Wir haben in dem kovarianten Differential dx'_{σ} einen kontravariantrn Ableitungsvektor

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^T = \left(\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial}{\partial x'^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^1} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial x'^2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial x'^3} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial x'^4} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

und die gesamte Matrix wird ein *"dyadisches Produkt"* oder ein Tensor der Stufe 2

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^T = \Lambda^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\nu}.$$

Offensichtlich sind in (7) die Indizes der partiellen Ableitung vertauscht worden (Druckfehler oder systematischer Fehler?).

Danach ist der kovariante Tensor $A'_\sigma \equiv \mathbf{a}'^T$ ein Zeilenvektor und der kontravariante Tensor $B'^\sigma \equiv \mathbf{b}'$ ein Spaltenvektor.

Das Besondere an den beiden behandelten Transformationen ist die Gegenüberstellung der Zeilen- und Spaltenvektoren

$$\mathbf{a}'^T = \mathbf{a}^T \Lambda^{-1}, \qquad \mathbf{b}' = \Lambda \mathbf{b}.$$

Durch Transposition der rechten Gleichung ergibt sich die Paarung

$$\mathbf{a}'^T = \mathbf{a}^T \Lambda^{-1}, \qquad \mathbf{b}'^T = \mathbf{b}^T \Lambda^T.$$

Beide Zeilenvektoren werden mit Λ^{-1} und Λ^T *kontragredient* zueinander transformiert, d.h. die kovarianten und kontravarianten Vektoren transformieren sich kontragredient zueinander. Das Wort Umkehrung bedeutet also Kontragredienz. BIANCHI [1] verwendet dafür das Wort "reciprok". Kovarianter und kontravarianter Vierervektor sind als Zeilen- bzw. Spaltenvektor die Grundlagen der Matrizenrechnung. Davon weicht die Tensoralgebra in einigen Stellen ab, weil das Transformationsverhalten zum Erreichen einer Invarianz normaler Vektorprodukte dient. Dennoch gibt es die Invarianz bei quadratischen Formen auch ohne die genannten Bedingungen.

Anmerkung: Der kontragredienten Transformation bediente sich LORENTZ [2, 3] im Zusammenhang mit der GALILEI-Transformation

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} - p_x \frac{\partial}{\partial x} - p_y \frac{\partial}{\partial y} - p_z \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + p_x t \\ y + p_y t \\ z + p_z t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + p_x \\ v_y + p_y \\ v_z + p_z \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

Der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1 = \frac{\partial}{\partial t} - p_x \frac{\partial}{\partial x} - p_y \frac{\partial}{\partial y} - p_z \frac{\partial}{\partial z}$$

ist darin der Ansatz für die Ortszeit.

Literatur

[1] BIANCHI, Luigi: *Vorlesungen über Differentialgeometrie.* 1. Teubner, 1899. – 659 S.

[2] LORENTZ, H.A.: *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvmants.* E. J. BRILL, 1892

[3] LORENTZ, H.A.: *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.* E. J. BRILL, 1895(2005)