Klassische Koordinatentransformationen

Wolfgang Lange

23. Juni 2016

1 Grundlegende Formeln

Jedem halbwegs gescheiten Gymnasiasten ist die klassische Koordinatentransformation [1] zwischen zwei Systemen mit den Achsen x, y, z und x', y', z' bekannt.

Die Parallelverschiebung nennt man *Translation* mit den Formeln

$$\begin{array}{ccccc} x & = & x' & + & a_1, \\ y & = & y' & + & a_2, \\ z & = & z' & + & a_3, \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} x' & = & x & - & a_1, \\ y' & = & y & - & a_2, \\ z' & = & z & - & a_3. \end{array} \tag{1}$$

Die Drehung oder Rotation ist etwas komplizierter. Zunächst gibt es 9 Richtungskosinus zwischen den zwei Paar Achsen

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & = & \cos(x, x'), \\ a_{21} & = & \cos(y, x'), \\ a_{31} & = & \cos(zx'), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{12} & = & \cos(x, y'), \\ a_{22} & = & \cos(y, y'), \\ a_{32} & = & \cos(z, y'), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{13} & = & \cos(z, z'), \\ a_{23} & = & \cos(y, z'), \\ a_{33} & = & \cos(z, z'). \end{array} \tag{2}$$

Damit erhält man die Drehungstransformationen

$$\begin{array}{ccccccc} x & = & a_{11}x' & + & a_{12}y' & + & a_{13}z', \\ y & = & a_{21}x' & + & a_{22}y' & + & a_{23}z', \\ z & = & a_{31}x' & + & a_{32}y' & + & a_{33}z', \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} x' & = & a_{11}x & + & a_{21}y & + & a_{31}z, \\ y' & = & a_{12}x & + & a_{22}y & + & a_{32}z, \\ z' & = & a_{13}x & + & a_{23}y & + & a_{33}z. \end{array} \tag{3}$$

Die *Kombination* dieser beiden Transformationen ergibt die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccccccc} x & = & a_{11}x' & + & a_{12}y' & + & a_{13}z' & + & a_1, \\ y & = & a_{21}x' & + & a_{22}y' & + & a_{23}z' & + & a_2, \\ z & = & a_{31}x' & + & a_{32}y' & + & a_{33}z' & + & a_3, \end{array} \tag{4}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x' & = & a_{11}(x - a_1) & + & a_{21}(y - a_2) & + & a_{31}(z - a_3), \\ y' & = & a_{12}(x - a_1) & + & a_{22}(y - a_2) & + & a_{32}(z - a_3), \\ z' & = & a_{13}(x - a_1) & + & a_{23}(y - a_2) & + & a_{33}(z - a_3). \end{array} \tag{5}$$

Die letzten Gleichungen kann man auch aufteilen in

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x' & = & a_{11}x & + & a_{21}y & + & a_{31}z & - & a_{11}a_1 & - & a_{21}a_2 & - & a_{31}a_3, \\ y' & = & a_{12}x & + & a_{22}y & + & a_{32}z & - & a_{12}a_1 & - & a_{22}a_2 & - & a_{32}a_3, \\ z' & = & a_{13}x & + & a_{23}y & + & a_{33}z & - & a_{13}a_1 & - & a_{23}a_2 & - & a_{33}a_3. \end{array} \tag{6}$$

2 Grundformeln in Matrizendarstellung

Die Variablen in den beiden Achsenpaaren x, y, z und x', y', z' schreiben wir als Spaltenvektoren oder nach EINSTEINS Begriffswelt[3] als kontravariante Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^{\mu}, \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x'^{\nu}. \tag{7}$$

Für die Richtungskosinus wählen wir eine Matrix und ihre Transponierte

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = D^{\mu}_{\nu}, \qquad D^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = D^{\nu}_{\mu}x^{\mu}. \tag{8}$$

Dann finden wir für die Drehungen

$$\mathbf{x} = D\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x^\mu = D^\mu_\nu x'^\nu, \tag{9}$$

$$\mathbf{x}' = D^T\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x'^\nu = D^\nu_\mu x^\mu. \tag{10}$$

Die beiden Drehungsmatrizen haben eine besondere Eigenschaft, die sich aus zwei Gleichungen ergibt. Die letzte Gleichung ist auch

$$\mathbf{x}' = D^T\mathbf{x} = D^{-1}\mathbf{x} \Longrightarrow D^T = D^{-1}, \tag{11}$$

also

$$DD^{-1} \quad = \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B,$$

$$DD^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Darin sind die b_{ik} gerade die Beziehungen der Richtungskosinus

$$\begin{array}{ccccccccc} b_{11} & = & a_{11}^2 & + & a_{21}^2 & + & a_{31}^2 & = & 1, \\ b_{22} & = & a_{12}^2 & + & a_{22}^2 & + & a_{32}^2 & = & 1, \\ b_{33} & = & a_{13}^2 & + & a_{23}^2 & + & a_{33}^2 & = & 1, \end{array} \tag{13}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} b_{12} & = & a_{11}a_{12} & + & a_{12}a_{22} & + & a_{13}a_{32} & = & 0, \\ b_{13} & = & a_{11}a_{31} & + & a_{12}a_{32} & + & a_{13}a_{33} & = & 0, \\ b_{23} & = & a_{21}a_{31} & + & a_{22}a_{32} & + & a_{23}a_{33} & = & 0, \\ b_{21} & = & a_{21}a_{11} & + & a_{22}a_{12} & + & a_{23}a_{13} & = & 0, \\ b_{31} & = & a_{31}a_{11} & + & a_{32}a_{21} & + & a_{33}a_{13} & = & 0, \\ b_{32} & = & a_{31}a_{21} & + & a_{32}a_{22} & + & a_{33}a_{23} & = & 0. \end{array} \tag{14}$$

Die Kombination von Translation und Rotation ist in Matrixdarstellung mit

$$a_{14} = a_1, \qquad a_{24} = a_2, \qquad a_{34} = a_3 \tag{15}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x & = & a_{11}x' & + & a_{12}y' & + & a_{13}z' & + & a_{14}, \\ y & = & a_{21}x' & + & a_{22}y' & + & a_{23}z' & + & a_{24}, \\ z & = & a_{31}x' & + & a_{32}y' & + & a_{33}z' & + & a_{34}, \end{array} \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

oder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Wir haben durch Hinzufügen der Identität $1 = 1 * 1$ wieder eine quadratische Transformationsmatrix gefunden.

3 Einführung der raum-zeitlichen Vierervektoren

Die Richtungskosinus sind dimensionslose Zahlen, aber für die Translation ohne Drehung kann man schreiben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} t \tag{19}$$

oder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 1 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Da staunt der Fachmann, und der Laie wundert sich. Ohne einen Fehler begangen zu haben, sind wir auf die klassische GALILEI-Transformation mit der Verschiebung zweier räumlicher Koordinatensystem gekommen. Keine Spur von LORENTZ-Transformation [4, 5] und anderem Schnick-Schnack der EINSTEINschen speziellen Relativitätstheorie [2]. Es gibt wegen $t = 1 * t'$ nur eine gemeinsame Zeit. Die Umkehrung dieser Gleichung ist

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_x \\ 0 & 1 & 0 & -v_y \\ 0 & 0 & 1 & -v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \tag{21}$$

und man kann ganz sauber Raum und Zeit trennen

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ t \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -\mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Ersetzt man nun die 3×3-Einheitsmatrix durch die entsprechenden Drehmatrix, kommt man auf die kombinierten Transformationen

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ t \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^T & -\mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Da die Drehmatrizen selbst die Eterminante Eins haben, sind auch die Determinanten der 4×4-Matrizen wegen des Zeilenvektors $\mathbf{0}^T$ vom Wert Eins.

Literatur

[1] *Kleine Enzyklopädie Mathematik.* VEB Bibliographisches Institut, 1968.

[2] EINSTEIN, A.: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper.* Annalen der Physik, 17:891–921, 1905.

[3] EINSTEIN, A.: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* Annalen der Physik, 49:769–822, 1916.

[4] LORENTZ, H.A.: *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvmants.* E. J. BRILL, 1892.

[5] LORENTZ, H.A.: *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.* E. J. BRILL, 1895(2005).