Allgemeine Transformationen bei Levi-Civita
- Zur Diskussion der Gleichzeitigkeit -

Wolfgang Lange

3. November 2017

In der Reihe "Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete" erschien 1928, also 12 Jahre nach der allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein [2], ein Buch von Tullio Levi-Civita mit dem Titel *Der Absolute Differentialkalkül uns seine Anwendungen in Geometrie und Physik* [5] in Übersetzung und Bearbeitung von Adalbert Duschek. Levi-Civita wurde von Einstein ausdrücklich als einer der Mathematiker erwähnt, auf dessen Grundlagen seine Theorie entwickelt worden ist. In dem Vorwort bemerkten Levi-Civita und Duschek, dass in der deutschen Ausgabe bewusst die ersten drei Kapitel der italienischen Originals weggelassen wurden. Diese drei Kapitel der englischen Auflage [4] können bei archive.org im Internet gelesen werden.

Die aufgeführten Zitate sollen nicht der wissenschaftlichen Diskussion dienen sondern dem Leser nur zeigen, dass es eine erhebliche Kritik von Levi-Civita gab, und dass selbst Einstein der Lorentz-Transformation nicht traute. Der Beweis ist für Fachleute relativ einfach zu führen, wenn man dem eingeschlagenen Weg von Lorentz [6] folgt und auf seine Vernachlässigungen verzichtet.

Zitat aus Kapitel I der englischen Ausgabe

Ein aus dem Zusammenhang herausgegriffenes Zitat aus

5. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Unabhängigkeit von n Funktionen von n Variablen.

lautet:

> "Diese Bedingung drückt die Tatsache aus, dass zwischen den ersten $n-1$ Funktionen keine Beziehung besteht.
>
> Nun wissen wir, wenn eine reversible Transformation auf die $x's$ angewendet wird, dass aus der Hypothese (5) folgt, dass die Determinante der $u's$ in Bezug auf den neuen Satz von Variablen y auch Null ist. Die Beziehung zwischen den x und y wird durch die folgenden Gleichungen gegeben:
>
> $$\left.\begin{array}{ccc} y_1 & = & y_1(x_1, ...x_n), \\ : & : & : \\ \\ y_{n-1} & = & y_{-1}(x_1, ...x_n), \\ y_n & = & x_n. \end{array}\right\} \qquad (7)$$
>
> Wir können feststellen, dass diese Formel eine reversible Transformation definiert, da die Funktionaldeterminante der y in Bezug auf die $x's$ ist
>
> $$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ : & ... & : & : \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix},$$
>
> und das aus der letzten Zeile zu erweitern, so ist es gleich D', was durch die Hypothese nicht Null ist."

Zur Erläuterung muss man sagen, dass es in einem n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, also mit n Variablen, nur maximal $n-m$ abhängige Variablen bei m unabhängigen Variablen geben kann, und dass es demnach in der $n = 4$-dimensionalen Raum-Zeit nur maximal 3 abhängige Raumkoordinaten und eine unabhängige Zeit-Koordinate geben kann, d.h., ohne dass es ausgesprochen wurde, keine Zeitgleichung wie in der LORENTZ-Transformation geben kann.

Zitat aus Kapitel VIII der deutschen Ausgabe

Der Bezug zur englischen Ausgabe wird im Abschnitt

3. Allgemeine Koordinatentransformationen in der vierdimensionalen Welt. Der Begriff „gleichzeitig“.

hergestellt.

> „Die allgemeinste Koordinatentransformation in der Menge M_4 besteht offenbar aus drei Gleichungen vom Typus
>
> $$(3) \qquad x^i = x^i\,(y_1, y_2, y_3, t)\,, \qquad (i = 1, 2, 3)$$
>
> die drei unabhängige Funktionen x^i der kartesischen Koordinaten y_i und der Zeit t sind; dazu kommt noch eine vierte Gleichung, mittels der die Zeit durch eine weitere Funktion $x^0\,(t, y_1, y_2, y_3)$ ersetzt wird, die von den anderen drei unabhängig ist. Diese vierte Koordinate wird mitunter als *Ortszeit* bezeichnet, weil sie nicht nur von der ursprünglichen Zeit, sondern auch vom Ort abhängt. Das Schema einer solchen Transformation ist somit
>
> $$(8) \qquad x^\alpha = x^\alpha\,(t, y_1, y_2, y_3)\,, \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)\,.$$
>
> Eine recht einfache, aber wichtige Eigenschaft derartiger Transformationen ist folgende. Haben zwei Ereignisse verschiedene Werte für die Raumkoordinaten y_i, aber dasselbe t, so werden nach ausgeführter Transformation im allgemeinen nicht nur die raumartigen Koordinaten x^i der beiden Ereignisse, sondern auch die zeitartigen Koordinaten x^0 verschieden sein; das bedeutet aber nichts anderes, als daß zwei Ereignisse, die im Bezugssystem y_1, y_2, y_3, t gleichzeitig erscheinen, dies im System der x^α im allgemeinen nicht mehr sind. Die Gleichzeitigkeit hängt also vom Bezugssystem ab. Dies ist offenbar nicht der Fall, wenn die erste der Gleichungen (8) die Form $x^0 = x^0(t)$ oder insbesondere $x^0 = t$ hat, denn dann reduziert sich (8) auf (3). Es handelt sich

> hier gerade um den intuitiven Begriff der absoluten Gleichzeitigkeit, der die klassische Physik sich auf Transformationen vom Typus (3) beschränken läßt. Eine schärfere Kritik dieses intuitiven Begriffes zeigt aber, daß er keine logische Notwendigkeit ist, sondern auf experimentellen Resultaten beruht, die nur als erste Näherungen angesehen werden können. Mit Rücksicht auf den rein spekulativen Charakter unserer Betrachtungen müssen wir also jedenfalls die Möglichkeit einer allgemeineren Auffassung des Begriffes der Gleichzeitigkeit zulassen."

Der folgende Abschnitt geht dann weiter:

4. Das Hamiltonsche Prinzip in der Einsteinschen Form und seine Invarianz gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen.

> „Die *Lagrange*sche Funktion L ist nach Ausführungen in Ziff. 2 eine Invariante gegenüber Transformationen (8); dagegen ist aber die Form des Integrals $\int Ldt$ nicht invariant, da im allgemeinen dt durch einen linearen Ausdruck in den Differentialen aller vier Veränderlichen x^α ersetzt wird. Man könnte versuchen, an Stelle von L einen allgemeineren Ausdruck einzuführen und so die gesuchte invariante Form von $\int Ldt$ zu erhalten, eine Methode, die zwar zum Ziel führen würde, aber auf so umständliche Art, daß der Gewinn an Allgemeinheit durch den Verlust an begrifflicher und formaler Einfachheit gänzlich aufgehoben wäre.
>
> Es ist jedoch nicht schwer, eine brauchbarere Form zu erhalten, die gegenüber jeder Transformation (8) invariant bleibt, wenn man das Hamiltonsche Prinzip bloß als Näherungsresultat ansieht, wobei aber die Näherung eine so gute ist, daß der Fehler gegenüber der strengen Form des Prinzips in den gewöhnlichen physikalischen und astronomischen Anwendungen nicht wahrnehmbar ist. Diese Forderung wird sicher erfüllt sein, sobald die Größenordnung des Fehlers rund ein Hundertmillionstel (10^{-8}) der von der klassischen Theorie gelieferten Werte beträgt. ..."

In der weiteren Folge stützt sich LEVI-CIVITA, ohne den Namen zu nennen, auf die Vernachlässigungen von LORENTZ mit dem Verhältnis der Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne zur Lichtgeschwindigkeit mit $\frac{v}{c} \approx 10^{-4}$. Das ist jedoch mit dem Anspruch auf exakte Wissenschaft nicht zulässig, wenn das nur auf dem nicht bewiesenen Lichtpostulat und Vernachlässigungen beruht.

Eine dermaßen schwache Kritik an EINSTEIN ist eines korrekten Wissenschaftlers nicht würdig, zumal dann nicht, wenn es u.a. indirekt um die fragwürdigen Paradoxien geht, die mit den Relativitätstheorien verbunden sind.

Zitat von Einstein

LEVI-CIVITA kannte offensichtlich die deutschsprachigen Berliner Sitzungsberichte nicht.

Dort erklärte EINSTEIN [1] S. 778:

> „Wie die spezielle Relativitätstheorie auf das Postulat gegründet ist, daß ihre Gleichungen bezüglich linearer, orthogonaler Transformationen kovariant sein sollen, so ruht die hier darzulegende Theorie auf dem Postulat der Kovarianz aller Gleichungssysteme bezüglich Transformationen von der Substitutionsdeterminante 1.“

Zunächst ist ein Postulat keine bewiesene Tatsache. Am Ende des Artikels räumt er ein:

> „Daß die Relativität der Bewegung gemäß der neuen Theorie wirklich gewahrt ist, geht daraus hervor, daß unter den erlaubten Transformationen solche sind, die einer Drehung des neuen Systems gegen das alte mit beliebig veränderlicher Winkelgeschwindigkeit entsprechen, sowie solchen Transformationen, bei welchen der Anfangspunkt des neuen Systems im alten System eine beliebig vorgeschrieben Bewegung ausführt.
>
> In der Tat sind die Substitutionen

$$
\begin{array}{rcrcr}
x' & = & x\cos\tau & + & y\sin\tau \\
y' & = & -\; x\sin\tau & + & y\cos\tau \\
z' & = & z & & \\
t' & = & t & &
\end{array}
$$

und

$$\begin{array}{rcl} x' &=& x - \tau_1 \\ y' &=& y - \tau_2 \\ z' &=& z - \tau_2 \\ t' &=& t, \end{array}$$

wobei τ bzw. τ_1, τ_2, τ_3 beliebige Funktionen von t sind, Substitutionen von der Determinante 1.“

Hier beschreibt er die GALILEI-Transformation , und der Kernpunkt $t' = t$deckt sich mit den Zitaten von LEVI-CIVITA. Eine beliebige Bewegung ist auch durch Überlichtgeschwindigkeit gegeben. Warum beharrt man dann immer noch auf dem Lichtpostulat? War EINSTEIN etwa 1916 bereits so desorientiert, dass er nicht wusste, was er 1915 geschrieben hatte? Nach den Worten von MARCEL GROSSMANN suchten beide nach „erlaubten Transformationen“, die sie nicht fanden (s. GROSSMANNs Enkelin [3]).

Literatur

[1] EINSTEIN, A.: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Mit Nachtrag).* Sitzungsber. d. kgl. preu. Akad. d. Wissenschaften, XLIV:778–786, 1915.

[2] EINSTEIN, A.: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* Annalen der Physik, 49:769–822, 1916.

[3] GRAF-GROSSMANN, CLAUDIA E.: *Marcel Grossmann - Aus Liebe zur Mathematik.* Römerhof Verlag Zürich, 2015.

[4] LEVI-CIVITA, T.: *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors).* Blackie&Son London, 1947.

[5] LEVI-CIVITA, TULLIO: *Der Absolute Differentialkalkül und seine Anwendungen in Geometrie und Physik.* Springer, 1928.

[6] LORENTZ, H.A.: *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.* E. J. BRILL, 1895(2005).